Prof. Javier Esparza
Kevin Kappelmann, Simon Roßkopf, Lukas Stevens

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2023 – Übungsblatt 13

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Dies ist das letzte Übungsblatt. Es wird kein Hausaufgabenblatt 13 veröffentlicht.

Vorbereitung ($\rightarrow$ vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

Individualaufgabe Ü13.1. (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- Satz von Cook-Levin
- Die Probleme MENGENÜBERDECKUNG, CLIQUE, RUCKSACK, BIN PACKING, PARTITION

Übung und Nachbereitung

Übungsaufgabe Ü13.2. (*Stundenplan*)

In dieser Aufgabe betrachten wir das STUNDENPLAN-Problem:

- **Eingabe**: Endliche Mengen S (Studierende), V (Vorlesungen) und T (Termine) und eine Relation $R \subseteq S \times V$. Dabei bedeutet $(s, v) \in R$, dass s die Vorlesung v besuchen möchte.
- **Frage**: Gibt es eine Abbildung $f : V \to T$, so dass alle Studierenden einen überschneidungsfreien Stundenplan haben, also

$$(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R \wedge v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2) \, .$$

(a) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN in NP liegt.

(b) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN NP-schwer ist, indem sie eine polynomielle Reduktion von 3COL auf STUNDENPLAN angeben. (Sie dürfe annehmen, dass 3COL NP-schwer ist)

Übungsaufgabe Ü13.3. (*ZOLP*)

Das *Zero-One-Linear-Program* (ZOLP) Problem sei wie folgt definiert:

- **Eingabe**: Ein System von linearen Ungleichungen

$$\begin{array}{rcl} b_1 & \leq & a_{1,1}y_1 + \ldots + a_{1,n}y_n \\ b_2 & \leq & a_{2,1}y_1 + \ldots + a_{2,n}y_n \\ & \vdots & \\ b_m & \leq & a_{m,1}y_1 + \ldots + a_{m,n}y_n \end{array}$$

mit $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{Z}$ und $m, n > 0$.

- **Frage**: Gibt es für die Variablen $y_1, \ldots, y_n$ Werte aus $\{0,1\}$, sodass alle Ungleichungen gleichzeitig erfüllt sind?

Zeigen Sie, dass das Entscheidungsproblem ZOLP NP-schwer ist. Geben Sie hierzu eine geeignete Reduktion von 3KNF-SAT auf ZOLP an und beschreiben Sie **zusätzlich** das Vorgehen anhand folgender Formel:

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$$

Den Korrektheitsbeweis müssen Sie nicht ausformulieren.

Übungsaufgabe Ü13.4. (*REJECT*)

Mit REJECT bezeichnen wir folgendes Problem:

- **Input:** Ein ϵ-NFA N mit n Zuständen über dem Alphabet $\Sigma = \{0,1\}$ und eine Zahl $m \leq n$.
- **Frage:** Gibt es ein Wort der Länge m das von N nicht akzeptiert wird?

In Mengenschreibweise:

$$\mathsf{REJECT} := \{(N,m) \mid N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \text{ ist } \epsilon\text{-NFA und } m \leq |Q| \text{ und } \Sigma^m \setminus L(N) \neq \emptyset\}$$

(a) Zeigen Sie, dass REJECT NP-vollständig ist. Verwenden Sie hierbei eine geeignete Reduktion von 3-KNF-SAT auf REJECT.

(b) Wenden Sie Ihre Reduktion auf $(x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ an. Geben Sie den konstruierten ϵ-NFA graphisch an.

Hinweis: Betrachten Sie die Menge aller nichterfüllenden Belegungen für die Formel F, die genau m Variablen hat, als Wörter der Länge m.