Prof. Javier Esparza
Kevin Kappelmann, Simon Roßkopf, Lukas Stevens

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2023 – Übungsblatt 13

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Dies ist das letzte Übungsblatt. Es wird kein Hausaufgabenblatt 13 veröffentlicht.

Vorbereitung ($\rightarrow$ vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

Individualaufgabe Ü13.1. (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- Satz von Cook-Levin
- Die Probleme MENGENÜBERDECKUNG, CLIQUE, RUCKSACK, BIN PACKING, PARTITION

Übung und Nachbereitung

Übungsaufgabe Ü13.2. (*Stundenplan*)

In dieser Aufgabe betrachten wir das STUNDENPLAN-Problem:

- **Eingabe**: Endliche Mengen S (Studierende), V (Vorlesungen) und T (Termine) und eine Relation $R \subseteq S \times V$. Dabei bedeutet $(s, v) \in R$, dass s die Vorlesung v besuchen möchte.
- **Frage**: Gibt es eine Abbildung $f : V \to T$, so dass alle Studierenden einen überschneidungsfreien Stundenplan haben, also

$$(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R \wedge v_1 \neq v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2) .$$

(a) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN in NP liegt.

(b) Zeigen Sie, dass STUNDENPLAN NP-schwer ist, indem sie eine polynomielle Reduktion von 3COL auf STUNDENPLAN angeben. (Sie dürfe annehmen, dass 3COL NP-schwer ist)

Lösungsskizze.

(a) Um zu zeigen, dass STUNDENPLAN in NP liegt, genügt es zu zeigen, dass es effizient überprüfbare Zertifikate gibt. Eine solches Zertifikat ist offensichtlich die gesuchte Abbildung f, die man z.B. als geordnete Liste von Terminen (einen pro Vorlesung) kodieren kann. Wir müssen uns lediglich klarmachen, dass dieses Zertifikat in Polynomialzeit überprüft werden kann. Das ist der Fall, denn man kann z.B. zur Überprüfung die Stundenpläne aller Studierenden ($|S|$ Stundenpläne mit maximal $|V|$ Einträgen) aufstellen und auf Überschneidungen prüfen.

(b) Für einen gegebenen Graph $G = (V, E)$ konstruieren wir ein Stundenplanproblem (S, V', T, R) wie folgt:

$$\begin{aligned} S &= E \\ V' &= V \\ T &= \{1, 2, 3\} \\ R &= \{(\{v_1, v_2\}, v) \in S \times V \mid v \in \{v_1, v_2\}\} \end{aligned}$$

Die Knoten des Graphen werden also zu Vorlesungen und die drei Farben aus dem Färbbarkeitsproblem zu Terminen, die man den Vorlesungen zuordnet. Für jede Kante zwischen zwei Knoten erzeugt man nun einen Studenten, der genau die beiden entsprechenden Vorlesungen hören will und somit verhindert, dass sie auf denselben Termin gelegt werden.

Die oben beschriebene Transformation ist in Polynomialzeit berechenbar (es handelt sich im Wesentlichen um eine "Umbenennung" der Konzepte). Fehlt noch der Korrektheitsbeweis:

$\Longrightarrow$: Sei $G \in$ 3COL. Dann gibt es eine Färbung $c : V \to \{1, 2, 3\}$ mit $c(v) \neq c(w)$ für alle $\{v, w\} \in E$ mit $v \neq w$. Falls $(s, v_1) \in R \wedge (s, v_2) \in R \wedge v_1 \neq v_2$ gilt, folgt nach Definition von R, dass $s = \{v_1, v_2\} \in E$ und $v_1 \neq v_2$. Somit gilt $c(v_1) \neq c(v_2)$, d.h. c ist eine valide Zeitzuordnung für die STUNDENPLAN-Instanz.

$\Longleftarrow$: Angenommen, es gibt eine valide Zeitzuordnung f für die STUNDENPLAN-Instanz korrespondierend zu den Graphen G. Sei $\{v, w\} \in E$ mit $v \neq w$. Dann gilt per Definition von R, dass $(\{v, w\}, v) \in R \wedge (\{v, w\}, w) \in R \wedge v \neq w$. Da f eine valide Zeitzuordnung ist, folgt dann $f(v) \neq f(w)$ und weiters $f(v), f(w) \in \{1, 2, 3\}$ per Definition von T. Somit ist f eine valide 3-Färbung von G.

Somit ist das Graphenfärbungsproblem auf das Stundenplanproblem polynomiell reduzierbar: 3COL $\leq_p$ STUNDENPLAN Da von 3COL bekannt ist, dass es NP-schwer ist, haben wir nun gezeigt, dass STUNDENPLAN NP-schwer ist, und somit (mit (a)) NP-vollständig.

Übungsaufgabe Ü13.3. (*ZOLP*)

Das *Zero-One-Linear-Program* (ZOLP) Problem sei wie folgt definiert:

- **Eingabe**: Ein System von linearen Ungleichungen

$$\begin{aligned} b_1 &\leq a_{1,1}y_1 + \ldots + a_{1,n}y_n \\ b_2 &\leq a_{2,1}y_1 + \ldots + a_{2,n}y_n \\ &\vdots \\ b_m &\leq a_{m,1}y_1 + \ldots + a_{m,n}y_n \end{aligned}$$

  mit $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{Z}$ und $m, n > 0$.
- **Frage**: Gibt es für die Variablen $y_1, \ldots, y_n$ Werte aus $\{0, 1\}$, sodass alle Ungleichungen gleichzeitig erfüllt sind?

Zeigen Sie, dass das Entscheidungsproblem ZOLP NP-schwer ist. Geben Sie hierzu eine geeignete Reduktion von 3KNF-SAT auf ZOLP an und beschreiben Sie **zusätzlich** das Vorgehen anhand folgender Formel:

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$$

Den Korrektheitsbeweis müssen Sie nicht ausformulieren.

Lösungsskizze.

- *Möglichkeit 1: Für jede Variable im Ausgangsproblem eine Variable im Zielproblem. Skizze:* Wir kodieren jede Klausel als eine Ungleichung im Zielproblem. Disjunktionen ersetzen wir mit Addition. Literale x_i werden in einen Summanden y_i übersetzt und Literale $\neg x_i$ in einen Summanden $1-y_i$. Damit ist ein Literal l erfüllt genau dann wenn der entsprechende Summand den Wert 1 annimmt. Um sicherzustellen, dass jede Klausel erfüllt ist, steht auf der linken Seite jeder Ungleichung 1. Offensichtlich kann eine jede Ungleichung dieser Form in die von ZOLP geforderte Form gebracht werden.

  Anwendung auf Beispiel $(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$:

  $$\begin{aligned} 1 &\leq (1-y_1)+y_2+y_3 \\ 1 &\leq y_1+(1-y_3)+y_4 \end{aligned}$$

  Umformen:

  $$\begin{aligned} 0 &\leq -y_1+y_2+y_3 \\ 0 &\leq y_1-y_3+y_4 \end{aligned}$$

- *Möglichkeit 2: Für jede Variable im Ausgangsproblem zwei Variablen im Zielproblem.* Sei $F := \bigwedge_{i=1}^{k} C_i$ und $C_i := \bigvee_{j=1}^{3} L_{i,j}$ mit z Variablen die Eingabe für das 3KNF-SAT Problem. Die Reduktion f modelliert jede Variable des SAT-Problems mit zwei Variablen des ZOLP-Problems. Sei x_i eine Variable dann encodiert y_{2i}, ob das Literal x_i wahr ist, und y_{2i-1}, ob das Literal $\neg x_i$ wahr ist. Somit haben wir

  $$f(x_i) \mapsto y_{2i} \qquad f(\neg x_i) \mapsto y_{2i-1}$$

  Für das ZOLP wählen wir $m = k + 2z$ und $n = 2z$. Die Zeile $i \in [1, k]$ ist dann definiert in Abhängigkeit von C_i als

  $$f(L_{i,1} \vee L_{i,2} \vee L_{i,3}) \qquad \mapsto \qquad 1 \leq f(L_{i,1}) + f(L_{i,2}) + f(L_{i,3})$$

  Zusätzlich fügen wir folgende Konsistenzgleichungen ein, damit y_{2i} und $y_{2i} - 1$ unterschiedliche Werte erhalten für alle $i \in [1, z]$

  $$\begin{aligned} 1 &\leq y_{2i}+y_{2i-1} \\ -1 &\leq -y_{2i}-y_{2i-1} \end{aligned}$$

  Die Reduktion ist polynomiell in der Eingabegröße, da für jede Klausel eine Ungleichung und für jede Variable 2 Ungleichungen erstellt werden.

  Anwendung auf Beispiel $(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$:

  $$\begin{aligned} 1 &\leq y_1+y_4+y_6 \\ 1 &\leq y_2+y_5+y_8 \\ 1 &\leq y_1+y_2 \\ -1 &\leq -y_1-y_2 \\ 1 &\leq y_3+y_4 \\ -1 &\leq -y_3-y_4 \\ 1 &\leq y_5+y_6 \\ -1 &\leq -y_5-y_6 \\ 1 &\leq y_7+y_8 \\ -1 &\leq -y_7-y_8 \end{aligned}$$

Übungsaufgabe Ü13.4. (*REJECT*)

Mit REJECT bezeichnen wir folgendes Problem:

- **Input:** Ein ϵ-NFA N mit n Zuständen über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ und eine Zahl $m \leq n$.
- **Frage:** Gibt es ein Wort der Länge m das von N nicht akzeptiert wird?

In Mengenschreibweise:

$$\mathsf{REJECT} := \{(N, m) \mid N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \text{ ist } \epsilon\text{-NFA und } m \leq |Q| \text{ und } \Sigma^m \setminus L(N) \neq \emptyset\}$$

(a) Zeigen Sie, dass REJECT NP-vollständig ist. Verwenden Sie hierbei eine geeignete Reduktion von 3-KNF-SAT auf REJECT.

(b) Wenden Sie Ihre Reduktion auf $(x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ an. Geben Sie den konstruierten ϵ-NFA graphisch an.

Hinweis: Betrachten Sie die Menge aller nichterfüllenden Belegungen für die Formel F, die genau m Variablen hat, als Wörter der Länge m.

Lösungsskizze.

(a)
- REJECT $\in NP$:
  Ein Zertifikat ist ein Wort $w \in \Sigma^m \setminus L(N)$. Da $m \leq |Q|$, ist $|w| = m$ polynomiell bezüglich $|N|$. Das Wortproblem (und damit $w \notin L(N)$) kann nun in polynomieller Zeit gelöst werden (vgl. Vorlesung).
- Idee für Reduktion: Der ϵ-NFA N soll alle nicht erfüllenden Belegungen von F akzeptieren und alle erfüllenden Belegungen ablehnen. Hierfür rät der NFA zunächst die Klausel, welche nicht erfüllt ist und dann die unerfüllende Belegung.
- Reduktion: Sei $F = \bigwedge_{i=1}^{k} C_i$ eine Formel in 3-KNF mit m Variablen $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ und mit $C_i = \bigvee_{j=1}^{l_i} L_{i,j}$ für jedes i. Der ϵ-NFA $N := \Big(Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_F\Big)$ wird wie folgt definiert, wobei $[i, j] := \{i, i+1, \ldots, j-1, j\}$:

$$\begin{aligned}
Q &:= \{q_0\} \cup \{q_{i,j} \mid i \in [1,k] \wedge j \in [0,m]\} \\
Q_F &:= \{q_{i,m} \mid i \in [1,k]\} \\
\delta &:= \{(q_0, \epsilon, q_{i,0}) \mid i \in [1,k]\} \\
&\quad \cup \{(q_{i,j-1}, 0, q_{i,j}) \mid j \in [1,m] \wedge \neg x_j \notin \{L_{i,1}, \ldots, L_{i,l_i}\}\} \\
&\quad \cup \{(q_{i,j-1}, 1, q_{i,j}) \mid j \in [1,m] \wedge x_j \notin \{L_{i,1}, \ldots, L_{i,l_i}\}\}
\end{aligned}$$

  Die Reduktion bildet dann F auf (N, m) ab.
- Polynomielle Zeit:
  Der konstruierte ϵ-NFA hat $\mathcal{O}(km)$ Zustände und Transition und ein konstantes Alphabet. Somit ist seine Größe polynomiell in F. Die Komponenten der Übergangsfunktion können während des Lesens einer Klausel C direkt konstruiert werden. Somit bedarf die Reduktion polynomielle Zeit.
- Korrektheit:
  Wir zeigen nun, dass die von N akzeptierten Wörter der Länge m genau die unerfül-

lenden Belegungen von F sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F \in \textsf{3-KNF-SAT} &\iff F \text{ ist erfüllbar} \\ &\iff \text{nicht alle Belegungen für } F \text{ sind unerfüllend} \\ &\iff N \text{ lehnt ein Wort der Länge } m \text{ ab} \\ &\iff (N, m) \in \textsf{REJECT} \end{aligned}$$

Sei $\sigma(F) = 0$ eine nicht erfüllende Belegung. Dann existiert insbesondere eine Klausel C_i mit $\sigma(C_i) = \sigma(L_{i,1}) + \sigma(L_{i,2}) + \sigma(L_{i,3}) = 0$. Das Wort $w = \sigma(x_1)\sigma(x_2)...\sigma(x_m)$ wird dann von $q_{i,0}$ aus akzeptiert und es gilt somit $w \in L(N)$.

Besteht andererseits ein Lauf in N über q_{i_0}, so erfüllt die Belegung, beschrieben durch den Lauf, kein Literal der Klausel C_i. Damit ist die Belegung unerfüllend für F.

(b) $(N, 4)$ mit N: