Prof. Javier Esparza
Kevin Kappelmann, Simon Roßkopf, Lukas Stevens

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2023 – Übungsblatt 10

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Für den Rest des Semesters gilt: $\mathbb{N} := \mathbb{N} := \{0, 1, 2, ...\}$ und $\mathbb{N}_+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Vorbereitung (→ vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

Individualaufgabe Ü10.1. (*Wichtige Begriffe & Kahoot*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- k-Band Turing-Maschine
- WHILE-Programm
- GOTO-Programm
- Konvertierung: WHILE → TM → GOTO → WHILE
- entscheidbar/unentscheidbar
- charakteristische Funktion einer Menge A: χ_A
- spezielles Halteproblem

Übung und Nachbereitung

Übungsaufgabe Ü10.2. (*Zweierpotenz: TM, WHILE, GOTO*)

Sei $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ die Funktion, die angibt, ob ein Wort die Binärdarstellung einer Zweierpotenz ist, wobei führende Nullen erlaubt sind $(0100)_2 = (100)_2 = 4$:

$$f(w) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (w)_2 = 2^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Geben Sie graphisch eine TM an, die f berechnet.

Erinnerung: Damit eine TM eine Funktion berechnet, muss das Band nach der Berechnung nur noch die Ausgabe enthalten und der Kopf der TM muss auf das erste Zeichen der Ausgabe zeigen.

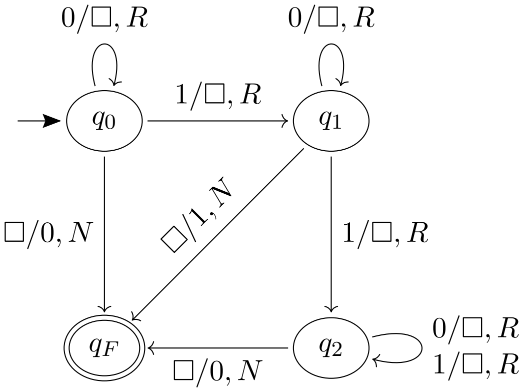
(b) Geben Sie ein WHILE-Programm an, das berechnet, ob $x_1 \in \mathbb{N}$ (die Eingabe) eine Zweierpotenz ist. Die Eingabe liegt, anders als in Aufgabe (a), in Dezimaldarstellung vor. Sie dürfen die Funktionen DIV und MOD benutzen. Geben Sie bei Eingabe einer Zweierpotenz 1 und 0 sonst zurück.

Erinnerung: Die Syntax von WHILE-Programmen findet man auf den Folien. Es gibt bei WHILE-Programmen (und GOTO-Programmen) kein Band und keinen direkten Zugriff auf die Binärrepräsentation der Eingabe. Nach dem Terminieren des Programms muss die Ausgabe in x_0 stehen.

(c) Geben Sie ein GOTO-Programm an, das berechnet, ob x_1 (die Eingabe) eine Zweierpotenz ist. Sie dürfen die Funktionen DIV und MOD benutzen.

Lösungsskizze.

(a) Eine mögliche TM:



(b) Lösungsvorschlag:

```
while x1 ≠ 0 do
    x2 := x1 MOD 2
    x1 := x1 DIV 2
    if x1 = 0 then
        x0 := 1
    else
        if x2 = 0 then
            x0 := x0 [1]
        else
            x0 := 0
            x1 := 0
        end
    end
end
```

(c)

```
START: IF x1 = 0 GOTO STOP;
x2 := x1 MOD 2;
x1 := x1 DIV 2;
IF x1 = 0 GOTO SUCCESS;
IF x2 = 0 GOTO START;
x0 := 0;
x1 := 0;
GOTO START;
SUCCESS: x0 := 1;
STOP: HALT
```

Übungsaufgabe Ü10.3. (*Entscheidbarkeit*)

Überprüfen Sie, ob die folgenden Behauptungen korrekt oder inkorrekt sind. Begründen Sie

[1] Beachten Sie, dass wir nur if-Anweisungen der Form $x_k = 0$ definiert haben und nicht der Form $x_k \neq 0$. Wenn $x_2 = 0$ gilt, wollen wir nichts tun, aber müssen eine Anweisung angeben. Wir haben $x_0 = x_0$ gewählt, die offensichtlich keinen Effekt hat.

dann Ihre Antworten wie folgt: Wenn L entscheidbar ist, beschreiben Sie einen Algorithmus, der die charakteristische Funktion χ_L berechnet. Wenn L unentscheidbar ist, leiten Sie einen Widerspruch zu einem Ergebnis der Vorlesung ab.

(a) Wenn A und B entscheidbare Sprachen sind, dann ist $A \cap B$ entscheidbar.

(b) Wenn A und $A \cup B$ entscheidbar sind, dann ist B entscheidbar.

Lösungsskizze. Für diese Aufgabe gibt es eine Videolösung: Link

(a) Korrekt. Wenn A und B entscheidbar sind, dann sind die charakteristischen Funktionen χ_A und χ_B berechenbar. Wir definieren

$$\chi_{A\cap B} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \chi_A = 1 \wedge \chi_B = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist intuitiv berechenbar und eine charakteristische Funktion von $A \cap B$, da

$$\chi_{A\cap B}(w) = 1 \iff \chi_A(w) = 1 \wedge \chi_B(w) = 1 \iff w \in A \wedge w \in B \iff w \in A \cap B.$$

Folglich ist die Menge $A \cap B$ entscheidbar.

Alternativ mit Turingmaschinen:
Sei T_A eine DTM, die A entscheidet, T_B eine DTM, die B entscheidet. Wir konstruieren eine DTM zu $A \cap B$: Gegeben x, berechne $T_A[x]$. Falls $T_A[x]$ mit 0 auf dem Band hält, lehne x ab, ansonsten berechne $T_B[x]$. Hält $T_B[x]$ mit 0 auf dem Band, lehne x ab, sonst akzeptiere x. Da T_A, T_B die jeweiligen Mengen entscheiden, terminieren beide DTM, womit auch die DTM zu $A \cap B$ stets mit dem korrekten Ergebnis terminiert. Damit ist $A \cap B$ entscheidbar.

(b) Inkorrekt. Sei $B \coloneqq K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w[w]\downarrow\} \subsetneq \{0,1\}^*$ das spezielle Halteproblem und $A = \{0,1\}^*$. Dann sind A und $A \cup B = \{0,1\}^*$ entscheidbar, aber B nicht.

Übungsaufgabe Ü10.4. (*Collatz-Vermutung*)

Zu einem Startwert $a_0 \in \mathbb{N}_+$ definieren wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt:

$$a_{n+1} \coloneqq \begin{cases} a_n/2 & a_n \text{ gerade} \\ 3a_n + 1 & a_n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die seit 1937 unbewiesene Collatz-Vermutung besagt:

Für alle Startwerte $a_0 \in \mathbb{N}_+$, gibt es einen Index $i \in \mathbb{N}$, sodass $a_i = 1$.

Nehmen Sie an, es gibt ein Programm N, welches als Eingabe ein WHILE-Programm P mit genau einer Eingabevariable nimmt und zu jedem solchen P angibt, ob P die Nullfunktion berechnet. *Zeigen Sie, dass Sie dann die Collatz-Vermutung beweisen oder widerlegen können.*

Hinweise:

- Geben Sie auch das WHILE-Programm P, das Sie für Ihren Beweis verwendet haben, an.
- Sie dürfen jede Syntax, die in den Folien für WHILE-Programme eingeführt worden ist, verwenden.

Lösungsskizze. Das folgende Programm P terminiert, falls es für einen Startwert a_0 (in Variable x) in der Collatz-Folge das Folgeglied $a_i = 1$ findet. Beachte, dass für die Eingabe $x = 0$ die Collatz-Folge nicht definiert ist und das Programm sofort mit 0 terminiert (Achtung: modifizierte Differenz). Zur besseren Lesbarkeit verwenden wir $y = x_0$, $x = x_1$, $z = x_2$, $c = x_3$ als Abkürzungen. Berechnet nun das Programm die Nullfunktion, so ist die Collatz-Vermutung korrekt, da für alle Startwerte das Programm hält und 0 zurückgibt. Berechnet das Programm nicht die Nullfunktion, so gibt es mindestens einen Startwert, für den das Programm nicht terminiert.

Programm P:

```
x := x - 1;
WHILE x ≠ 0 DO
  x := x + 1;
  z := x MOD 2;
  IF z = 0 DO
    x := x DIV 2
  ELSE
    z := x + x;
    x := x + z;
    x := x + 1
  END;
  x := x - 1
END;
y := 0
```