Prof. Javier Esparza
Kevin Kappelmann, Simon Roßkopf, Lukas Stevens

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2023 – Übungsblatt 8

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Für den Rest des Semesters gilt: $\mathbb{N} \coloneqq \mathbb{N} \coloneqq \{0, 1, 2, ...\}$ und $\mathbb{N}_+ \coloneqq \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Notation von PDA-Regeln 2: Auf Übungsblatt 7 wurde eine graphische Notation für PDAs eingeführt. Für einige häufige Fälle führen wir nun weitere Kurzschreibweisen ein. Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ ein PDA mit $\Gamma = \{X_1, X_2, ..., X_k\}$ und $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$. Wir schreiben

- $a, \Gamma/\varepsilon$ statt $a, X_1/\varepsilon, ..., a, X_k/\varepsilon$,
- $a, \Gamma/\alpha\Gamma$ statt $a, X_1/\alpha X_1, ..., a, X_k/\alpha X_k$, mit $\alpha \in \Gamma^*$, und
- a statt $a, \Gamma/\Gamma$.

Übung und Nachbereitung

Übungsaufgabe Ü8.1. (*PDA Einschränkungen*)

(a) Wir beschränken die Größe des Kelleralphabets Γ von PDAs und zeigen, dass jede kontextfreie Sprache von einem PDA mit $|\Gamma| = 2$ erkannt werden kann. Skizzieren Sie hierzu eine allgemeine Übersetzung von einem PDA mit $|\Gamma| > 2$ zu einem PDA mit $|\Gamma'| = 2$, sodass beide Automaten die gleiche Sprache erkennen.

(b) Wir beschränken die Kellerhöhe von PDAs auf maximal k Kellerzeichen und nennen diese PDAs *k-bounded-Stack-PDA*. Insbesonders kann ein solcher PDA keine PUSH-Operationen ausführen, sollten danach mehr als k Symbole auf dem Stack liegen. Zeigen Sie, dass k-bounded-Stack-PDA genau die regulären Sprachen erkennen, indem Sie eine allgemeine Übersetzung zu $\varepsilon-$NFAs angeben.

Übungsaufgabe Ü8.2. (*Kodiergott*)

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Für ein Wort $w \in \{0, 1\}^*$ bezeichnen wir mit $(w)_2$ den Dezimalwert des Binärwortes in most-significant-bit first Darstellung. Beispielsweise $(1100)_2 = 12$.

Betrachte die Sprache $L \coloneqq \{wa^{(w)_2} \mid w \in \{0, 1\}^n\}$. Beispielsweise gilt $1100a^{12} \in L$. Konstruieren Sie einen deterministischen PDA für L mit $\mathcal{O}(n)$ Stacksymbolen und Zuständen. Außerdem soll die Kellerhöhe des Automaten stets $\mathcal{O}(n)$ beschränkt sein.

Übungsaufgabe Ü8.3. (*Zählerautomaten*)

Wir beschränken in dieser Aufgabe das Kelleralphabet von PDAs auf nur ein einziges Symbol und untersuchen die Ausdrucksmächtigkeit dieser Automaten etwas genauer.

(a) Geben Sie eine äquivalente Formulierung als Automaten, die statt des Kellers einen Zähler verwenden, an.

(b) Geben Sie einen solchen Automaten an, der eine nicht reguläre Sprache akzeptiert.

(c) Nun betrachten wir eine Variante, die zusätzlich noch ein Kellersymbol erlaubt, um den Anfang des Kellers zu markieren. Geben Sie wieder eine Charakterisierung mit Zählern an und einen Automaten, der eine kontextfreie Sprache akzeptiert, die von keinem Automaten im vorherigen Modell akzeptiert wird.

(d) Geben Sie eine kontextfreie Sprache an, die von keiner der betrachteten Automatenklassen akzeptiert wird.

Knobelaufgaben (werden nicht im Tutorium besprochen): Die folgenden Aufgaben können alle unabhängig voneinander gelöst werden:

(e) Geben Sie einen solchen Automaten an, der die Sprache $\overline{L}$ für $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$ akzeptiert.

(f) Nun betrachten wir deterministische Varianten dieser Automaten. Zeigen Sie zunächst, dass die Klasse dieser deterministischen Automaten unter dem Sprachkomplement abgeschlossen ist.

(g) Zeigen Sie, dass kein deterministischer Zählerautomat die Sprache L akzeptiert. *Hinweis:* Wie viele verschiedene Zustände kann ein Automat beim Lesen von Worten der Länge n erreichen?

(h) Zeigen Sie aus den vorherigen Aussagen, dass nichtdeterministische Automaten mit einem Zähler strikt mächtiger sind als deterministische Automaten mit beliebig vielen Zählern.