

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2023 – Übungsblatt 7

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Für den Rest des Semesters gilt: $\mathbb{N} := \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ und $\mathbb{N}_+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Notation von PDA-Regeln: Anstatt der in den Folien verwendeten Schreibweise $(q, YZ) \in \delta(p, a, X)$ für die Ersetzungsregeln eines PDA kann man alternativ $pX \xrightarrow{a} qYZ$ schreiben wobei $p, q \in Q$, $X \in \Gamma$, $YZ \in \Gamma^*$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

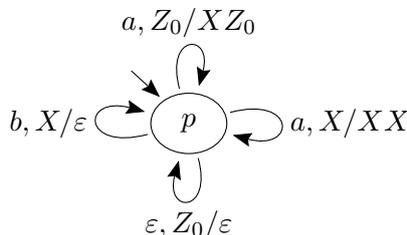
Beispiel: Den PDA mit δ :

$$\begin{aligned} \delta(p, a, Z_0) &= \{(p, XZ_0)\} & \delta(p, a, X) &= \{(p, XX)\} \\ \delta(p, b, X) &= \{(p, \varepsilon)\} & \delta(p, \varepsilon, Z_0) &= \{(p, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

schreibt man alternativ:

$$pZ_0 \xrightarrow{a} pXZ_0 \quad pX \xrightarrow{a} pXX \quad pX \xrightarrow{b} p \quad pZ_0 \xrightarrow{\varepsilon} p$$

oder man stellt diesen als Graph mit Knotenmenge Q dar, wobei die Kante (p, q) dann mit “ $a, X/YZ$ ” beschriftet ist:



Auf der folgenden Website können Sie PDAs konstruieren, simulieren, testen,...

<https://automatonsimulator.com/>

Beachten Sie dabei: die PDAs auf der Website starten mit leerem Keller und akzeptieren mit Endzustand.

Vorbereitung (→ vor der Übung selbstständig zu bearbeiten)

Individualaufgabe Ü7.1. (Wichtige Begriffe)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- erzeugende, erreichbare, nützliche Nichtterminale

- CYK-Algorithmus
- Kellerautomat (PDA)
- Unterschied zwischen $L_\epsilon(A)$ und $L_F(A)$ für einen PDA A

Individualaufgabe Ü7.2. (*Automata Tutor: CYK & PDAs*)

Lösen Sie die Aufgaben Ü7.2 (a–f) auf [Automata Tutor](#).

Achtung: Bei den *PDA construction* Aufgaben darf ihr konstruierter PDA nicht zu viele Zustände oder zu viele Stacksymbole haben (siehe Aufgabenstellung). Wenn Sie einen ϵ -Übergang angeben wollen, geben Sie statt ϵ bitte **E** ein (siehe Hinweisbox über Canvas). Die Simulation bei PDAs ist deaktiviert. Bitte wundern Sie sich nicht, dass bei einem Klick auf **Start Simulation** nichts passiert.

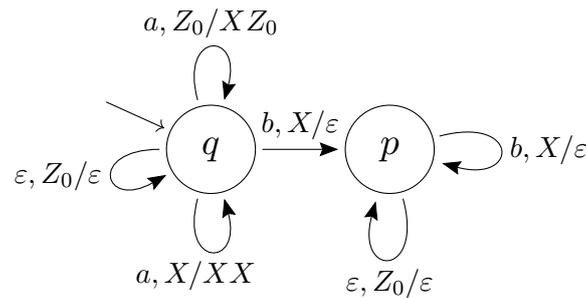
Tipp: Für den Aufgabentyp “CYK” können Sie sich zum Üben weitere Aufgaben von AT generieren lassen. Klicken Sie dafür auf **Home > My Autogenerated Problems** und wählen Sie den Aufgabentyp und gewünschten Schwierigkeitsgrad.

Individualaufgabe Ü7.3. (*(M)ein PDA*)

Zeichnen Sie einen PDA, der die Sprache $L = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$ erkennt.

Lösungsskizze. Idee: Für jedes a legen wir ein X auf den Stack und überprüfe dann, ob die die Anzahl von b s mit der Anzahl an X auf dem Stack übereinstimmt.

Ein PDA A der mit leerem Keller die Sprache L akzeptiert (also $L_\epsilon(A) = L$) ist:



Übung und Nachbereitung

Übungsaufgabe Ü7.4. (*Prächomsky-Normalform*)

Die CFG G bestehe aus folgenden Produktionen über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$:

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow ASA \mid aB \\
 A &\rightarrow B \mid S \mid CB \\
 B &\rightarrow b \mid \epsilon \\
 C &\rightarrow aC \\
 D &\rightarrow aSCb \mid a
 \end{aligned}$$

- Beschreiben Sie in eigenen Worten, wann ein Nichtterminal *nützlich* in einer Grammatik ist.
- Reduzieren Sie die Grammatik G auf die nützlichen Nichtterminale indem Sie zunächst alle nicht-erzeugende und anschließend alle nicht-erreichbare Nichtterminale eliminieren.

Hinweis: Das Ergebnis ist die Grammatik aus Aufgabe Ü6.4.

Übungsaufgabe Ü7.5. (CYK)

- (a) Beschreiben Sie in eigenen Worten, wie die Indizes in einer CYK-Tabelle zu verstehen sind.
- (b) Beschreiben Sie in eigenen Worten, wie man den Inhalt eines Feldes in der CYK-Tabelle berechnet.
- (c) Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, T, U, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ in CNF mit den folgenden Produktionen P :

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow TS \mid CT \mid a & A \rightarrow a \\ T \rightarrow AU \mid TT \mid c & B \rightarrow b \\ U \rightarrow SB \mid AB & C \rightarrow c \end{array}$$

Bestimmen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob $ccaab \in L(G)$ und $aabcc \in L(G)$. Geben Sie dabei auch die berechneten Tabellen an.

Übungsaufgabe Ü7.6. (PDAs)

Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils einen Kellerautomaten A_i in einer der oben aufgeführten Darstellungsarten an, sodass $L_i = L(A_i)$. Der Automat soll mit *leerem Stack* akzeptieren. Geben Sie dann zusätzlich für jeden Automaten jeweils ein nicht-leeres Wort w mit akzeptierendem Lauf an.

- (a) $L_1 = \{a^n b^{3n} \mid n \geq 0\}$
- (b) $L_2 = \{a^n b^m \in \{a, b\}^* \mid n \leq m \leq 2n\}$
- (c) $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid 2 \cdot |w|_a = 3 \cdot |w|_b\}$