Prof. Javier Esparza
Kevin Kappelmann, Simon Roßkopf, Lukas Stevens

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2023 – Übungsblatt 5

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Für den Rest des Semesters gilt: $\mathbb{N} \coloneqq \mathbb{N}_0 \coloneqq \{0, 1, 2, ...\}$ und $\mathbb{N}_+ \coloneqq \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$.

Vorbereitung ($\rightarrow$ vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

Individualaufgabe Ü5.1. (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- Kontextfreie Sprache (*CFL*)
- Kontextfreie Grammatik (*CFG*)
- Syntaxbaum
- Ableitung, Linksableitung, Rechtsableitung

Individualaufgabe Ü5.2. (*Automata Tutor: "Contextfree Languages"*)

Lösen Sie die Aufgaben Ü5.2 (a–d) auf Automata Tutor.

Individualaufgabe Ü5.3. (*Ableitung und Syntaxbaum*)

Sei $G = (\{S, E, O, A, B, X\}, \{a, b\}, P, S)$ die CFG mit folgenden Produktionen P:

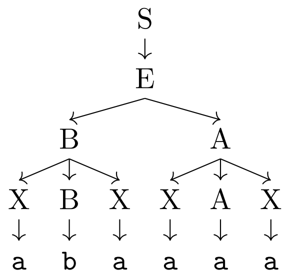
$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow E \mid O \\
E &\rightarrow AB \mid BA \\
A &\rightarrow XAX \mid a \\
B &\rightarrow XBX \mid b \\
O &\rightarrow XXO \mid X \\
X &\rightarrow a \mid b
\end{aligned}
$$

(a) Geben Sie für jedes der folgenden Wörter jeweils eine Linksableitung und eine Rechtsableitung und den entsprechenden Syntaxbaum an:
(i) $abaaaa$ (ii) $babab$ (iii) $aabbaaba$

(b) Geben Sie ein Wort $w \in L(G)$ mit zwei verschiedenen Syntaxbäumen an.

Lösungsskizze.

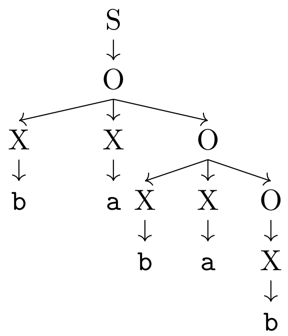
(a) (i)
Linksableitung: $S \rightarrow E \rightarrow BA \rightarrow XBXA \rightarrow aBXA \rightarrow abXA \rightarrow abaA \rightarrow abaXAX \rightarrow abaaAX \rightarrow abaaaX \rightarrow abaaaa$
Rechtsableitung: $S \rightarrow E \rightarrow BA \rightarrow BXAX \rightarrow BXAa \rightarrow BXaa \rightarrow Baaa \rightarrow XBXaaa \rightarrow XBaaaa \rightarrow Xbaaaa \rightarrow abaaaa$



(ii)

Linksableitung: $S \rightarrow O \rightarrow XXO \rightarrow bXO \rightarrow baO \rightarrow baXXO \rightarrow babXO \rightarrow babaO \rightarrow babaX \rightarrow babab$

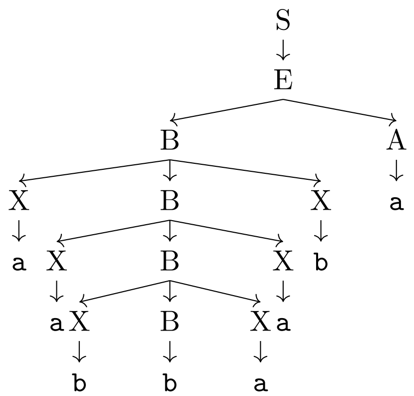
Rechtsableitung: $S \rightarrow O \rightarrow XXO \rightarrow XXXXO \rightarrow XXXXX \rightarrow XXXXb \rightarrow XXXab \rightarrow XXbab \rightarrow Xabab \rightarrow babab$



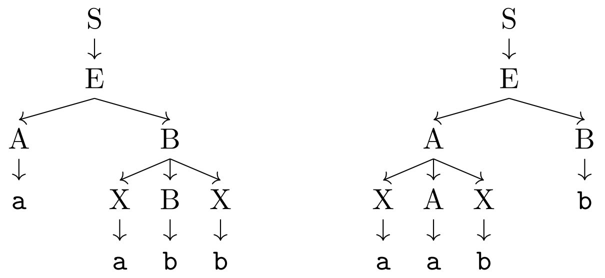
(iii)

Linksableitung: $S \rightarrow E \rightarrow BA \rightarrow XBXA \rightarrow aBXA \rightarrow aXBXXA \rightarrow aaBXXA \rightarrow aaXBXXXA \rightarrow aabBXXXA \rightarrow aabbXXXA \rightarrow aabbaXXA \rightarrow aabbaaXA \rightarrow aabbaabA \rightarrow aabbaaba$

Rechtsableitung: $S \rightarrow E \rightarrow BA \rightarrow Ba \rightarrow XBXa \rightarrow XBba \rightarrow XXBXba \rightarrow XXBaba \rightarrow XXXBXaba \rightarrow XXXBaaba \rightarrow XXXbaaba \rightarrow XXbbaaba \rightarrow Xabbaaba \rightarrow aabbaaba$



(b)



Übung und Nachbereitung

Übungsaufgabe Ü5.4. (*DER Satz*)

Entscheiden Sie, ob folgende Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ regulär sind. Bestimmen Sie hierzu die Residualsprachen. Falls die Sprache regulär ist, zeichnen Sie den kanonischen Minimalautomat und beschriften Sie die Zustände mit den entsprechenden Residualsprachen. Falls die Sprache nicht regulär ist, reicht es eine unendliche Menge von Wörtern mit unterschiedlichen Residualsprachen zu bestimmen und zu zeigen, dass die Elemente dieser Menge paarweise verschieden sind.

(a) $L_1 = \{a^{2i} \mid i \in N\}$

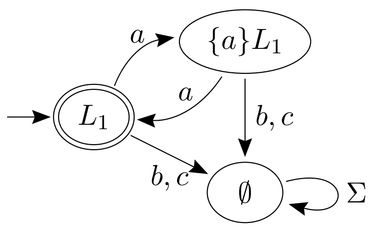
(b) $L_2 = \{a^i b^i c^i \mid i \in N\}$

(c) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 2 \cdot |w|_b\}$

(d) $L_4 = L((a^*(b \mid c))^*)$

Lösungsskizze. Hinweis: Da die Sprachen aus dem Kontext ersichtlich sind, lassen wir den L_i Subscript bei $\equiv$ und $[w]$ weg.

(a) Kanonischer DFA:



(b) Bestimmen einer unendlichen Menge von Wörtern mit unterschiedlichen Residualsprachen:

$$\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

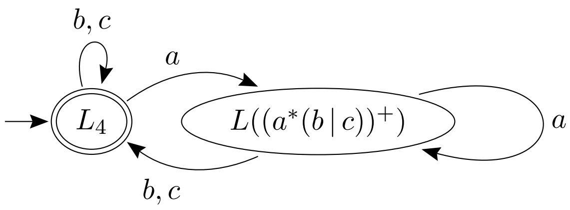
Beweis: Sei $i, j \in \mathbb{N}$ verschieden. Dann $a^i b^i c^i \in L_2$, aber $a^j b^j c^i \notin L_2$. Daher $L_2^{a^i b^i} \neq L_2^{a^j b^j}$. Somit sind alle Residualsprachen unterschiedlich und L_2 keine reguläre Sprache.

(c) Bestimmen einer unendlichen Menge von Wörtern mit unterschiedlichen Residualsprachen:

$$\{b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Beweis: Sei $i, j \in \mathbb{N}$ verschieden. Dann $b^i a^{2i} \in L_3$, aber $b^j a^{2i} \notin L_3$. Daher $L_3^{b^i} \neq L_3^{b^j}$. Somit sind alle Residualsprachen unterschiedlich und L_3 keine reguläre Sprache.

(d) Kanonischer DFA:



Übungsaufgabe Ü5.5. (*Sprache einer kontextfreien Grammatik*)
Sei $L = \{w \in \Sigma^* \mid w = w^R\}$ die Sprache der Palindrome über $\Sigma = \{a, b\}$.

(a) Geben Sie eine Grammatik für L an.

(b) Geben Sie eine Grammatik für $\overline{L}$ an.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie: $\overline{L}$ ist regulär.

Lösungsskizze.

(a)

$$S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \epsilon$$

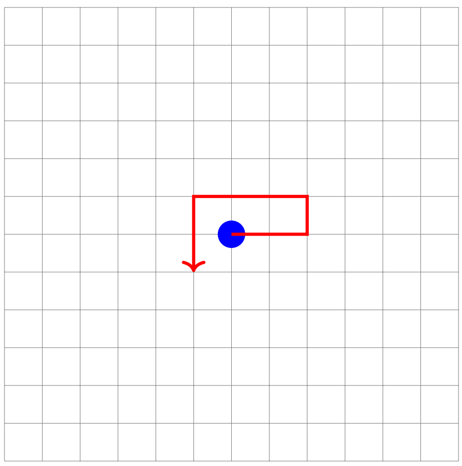
(b)

$$\begin{aligned} S &\to aSa \mid bSb \mid aTb \mid bTa \\ T &\to aT \mid bT \mid \epsilon \end{aligned}$$

(c) $\overline{L}$ ist nicht regulär. Angenommen $\overline{L}$ wäre regulär. Da reguläre Sprachen unter Komplement abgeschlossen sind, ist somit auch L regulär. In Ü4.3 (a) haben wir jedoch gezeigt, dass L nicht regulär ist. Widerspruch.

Übungsaufgabe Ü5.6. (*Pfeilsprachen*)

In dieser Aufgabe betrachten wir Sprachen, deren Worte Linienzüge in einem unendlichen zweidimensionalen Gitter von einem fixen Startpunkt aus beschreiben. Die folgende Grafik zeigt einen Ausschnitt aus dem Gitter:

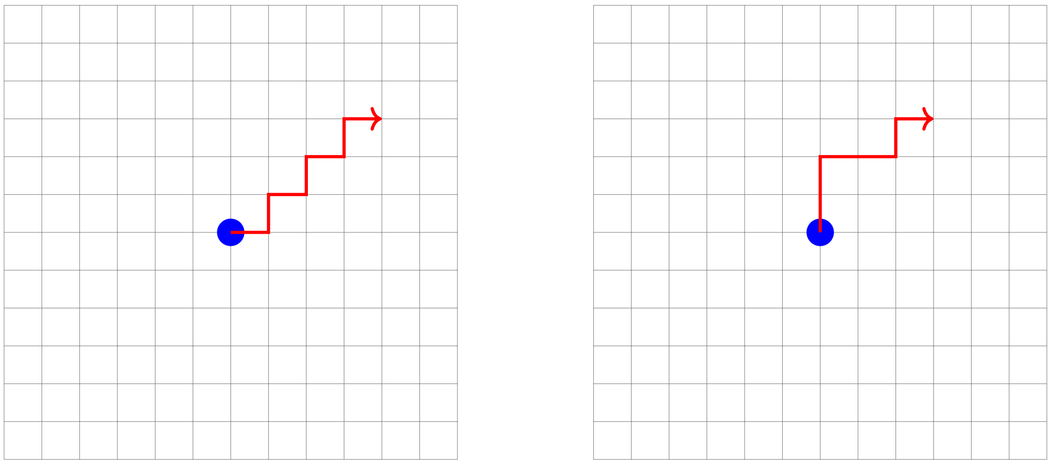


Der Startpunkt ist blau markiert. Linienzüge beschreiben wir im Folgenden als eine Sequenz von Pfeilen, d.h. als Worte über dem Alphabet $\Sigma = \{\rightarrow, \leftarrow, \uparrow, \downarrow\}$. Die Pfeile beschreiben dabei (vom Startpunkt aus gesehen) einen ein Kästchen langen Schritt entlang des Gitters. Wir stellen daher den im Bild rot eingezeichnete Linienzug durch das Wort $w = \rightarrow\rightarrow\uparrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\downarrow\downarrow$ dar.

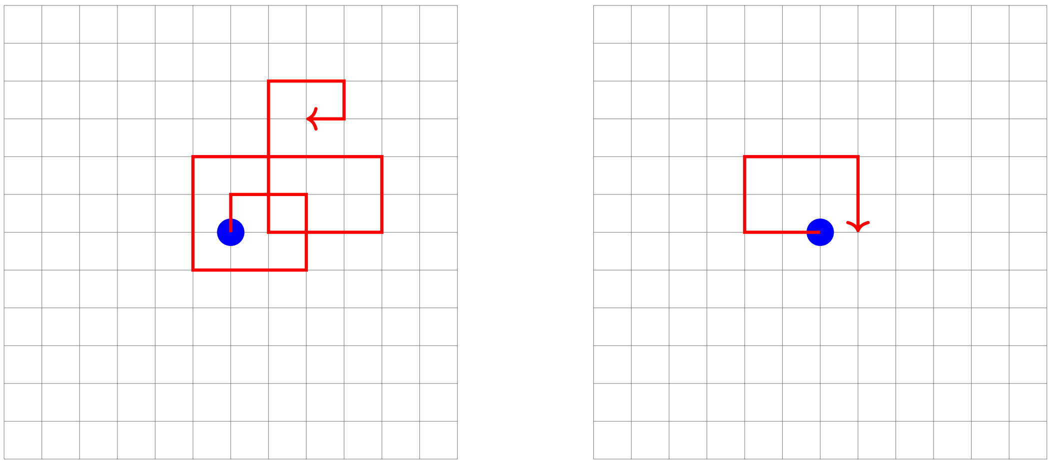
(a) Betrachten Sie die folgenden Beschreibungen in natürlicher Sprache zusammen mit jeweils einem Beispiel, welches in der Sprache liegt (auf der linken Seite), und einem Beispiel, das kein Element der Sprache ist (auf der rechten Seite).

Geben Sie für jede der Sprachen eine intensionale Mengendarstellung der Form $\{w \in \Sigma^* \mid ...\}$ an.

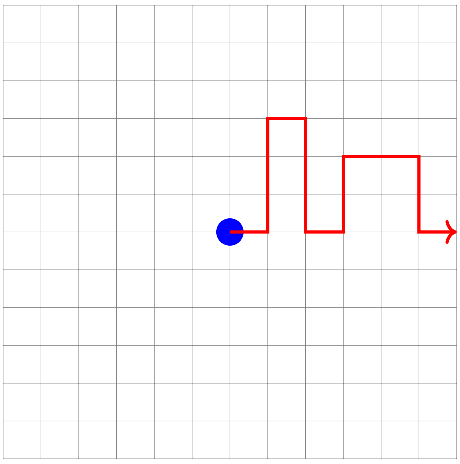
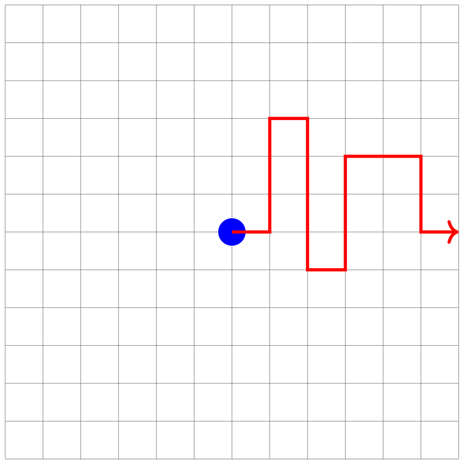
(1) Die Sprache aller Treppen über dem Alphabet $\Sigma' := \{\rightarrow, \uparrow\}$.



(2) Die Sprache aller im Uhrzeigersinn laufenden Spiralen über dem Alphabet Σ, die vom Startpunkt aus zuerst nach oben laufen.



(3) Die Sprache aller "Skylines" über dem Alphabet $\Sigma'' := \{\rightarrow, \uparrow, \downarrow\}$.

Hinweis: Die Sprachen sind mithilfe der Beispiele nicht eindeutig bestimmt. Ziel der Aufgabe ist es, die intuitive Beschreibung (z.B. "Sprache aller Skylines") zusammen mit den Beispielen in eine möglichst allgemeine Sprachdefinition zu bringen.

(b) Stellen Sie Vermutungen auf, ob die obigen Sprachen regulär oder kontextfrei sind. Begründen Sie Ihre Antwort möglichst anschaulich anhand des Beispiels.

(c) Geben Sie zu jeder der Sprachen L aus Aufgabenteil (a) eine Grammatik G an.

Lösungsskizze.

(a) (1) $L = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v.\ w = uv \wedge u \in L((\rightarrow\uparrow)^*) \wedge v \in \{\varepsilon, \rightarrow\}\}$

(2) $L = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*.\ uv \in L((\uparrow^+\rightarrow^+\downarrow^+\leftarrow^+)^*)\}$

(3) $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \in \{\uparrow^n\rightarrow^m\downarrow^n \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_+\}^*\}$ (wir erlauben, dass zwei "Häuser" an derselben x-Koordinate beendet, d.h. Pfeil runter, und begonnen, d.h. Pfeil rauf, werden).

(b) (1) regulär, da nur eine Alternierung konstanter Pfade verlangt wird.

(2) regulär, da nur die Laufrichtung wichtig ist, aber nicht die Länge.

(3) nicht regulär, da zwei Längen verglichen werden müssen; aber kontextfrei.

(c) (1) $S \mapsto \rightarrow\uparrow S \mid \rightarrow \mid \varepsilon$

(2) $S \mapsto \uparrow S \mid \uparrow T \mid \varepsilon \qquad T \mapsto \rightarrow T \mid \rightarrow U \mid \varepsilon \qquad U \mapsto \downarrow U \mid \downarrow V \mid \varepsilon \qquad V \mapsto \leftarrow V \mid \leftarrow S \mid \varepsilon$

(3) $S \mapsto \epsilon \mid TS \quad T \mapsto \uparrow T \downarrow \mid \rightarrow R \qquad R \mapsto \rightarrow R \mid \epsilon$