Prof. Javier Esparza
Kevin Kappelmann, Simon Roßkopf, Lukas Stevens

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2023 – Übungsblatt 3

- **Tipp:** Auf dieser (und dort verlinkten) Website(n) können Sie interaktiv DFAs, NFAs, reguläre Ausdrücke,... erzeugen, simuliereren, umwandeln,...
- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Für den Rest des Semesters gilt: $\mathbb{N} \coloneqq \mathbb{N}_0 \coloneqq \{0, 1, 2, ...\}$ und $\mathbb{N}_+ \coloneqq \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$.

Vorbereitung (→ vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

Individualaufgabe Ü3.1. (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- Ardens Lemma
- Produktkonstruktion

Übung und Nachbereitung

Übungsaufgabe Ü3.2. (*RE -> ϵ-NFA*)

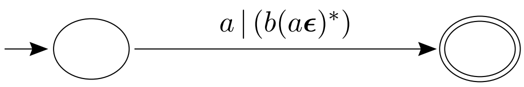
Wandeln sie folgenden regulären Ausdruck $a \mid ((b \mid \emptyset)(a(b\emptyset)^*)^*)$ in einen ϵ-NFA um. Folgen Sie hierfür strikt dem Vorgehen aus der Vorlesung.

Lösungsskizze.

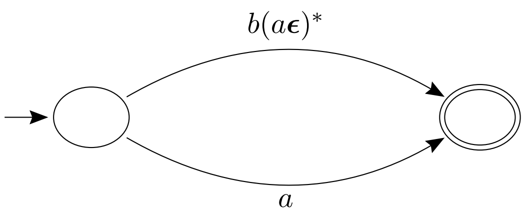
Schritt 1:

$$a \mid ((b \mid \emptyset)(a(b\emptyset)^*)^*) \rightsquigarrow a \mid (b(a(b\emptyset)^*)^*) \rightsquigarrow a \mid (b(a\emptyset^*)^*) \rightsquigarrow a \mid (b(a\epsilon)^*)$$

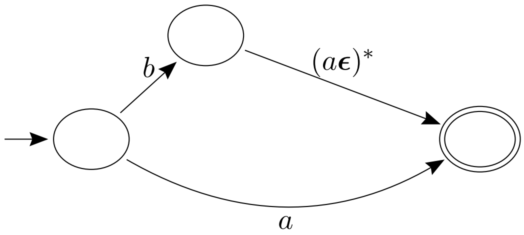
Schritt 2:



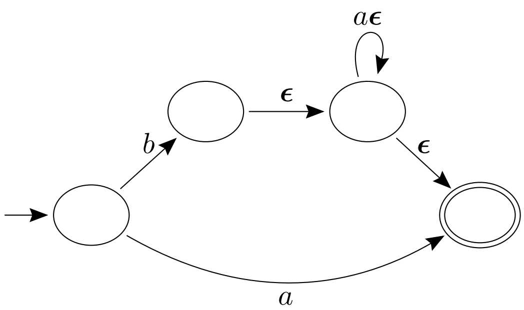
Auswahl:



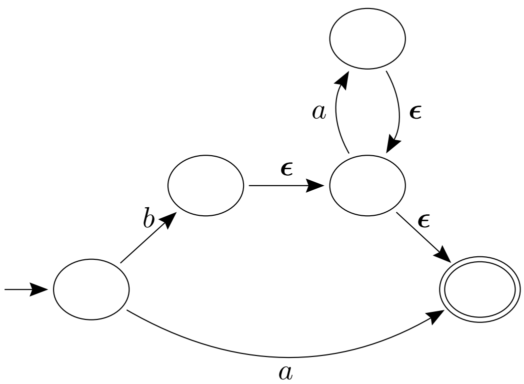
Konkatenation:



Iteration:

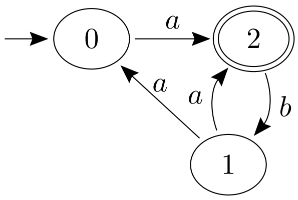


Konkatenation:



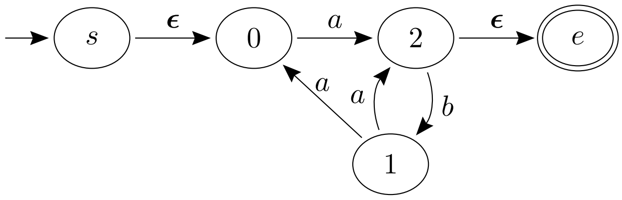
Übungsaufgabe Ü3.3. ($\boldsymbol{\epsilon}$-*NFA -> RE*)

Wandeln Sie folgenden $\boldsymbol{\epsilon}$-NFA in einen regulären Ausdruck um. Folgen Sie dem Vorgehen in der Vorlesung und eliminieren Sie die Zustände in aufsteigender Reihenfolge.

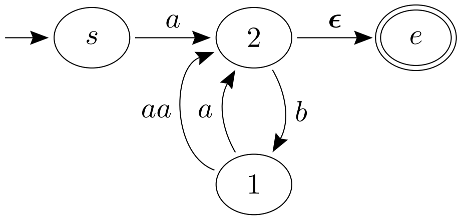


Lösungsskizze.

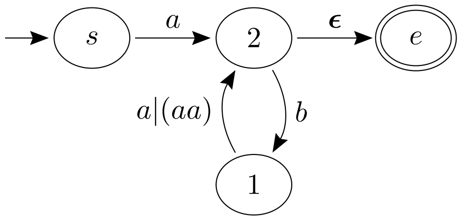
Preproccessing:



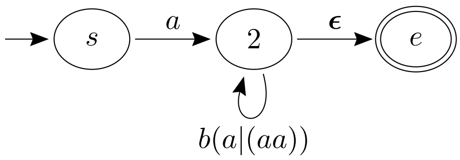
Eliminiere 0:



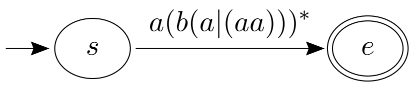
Vereinige Transitionen:



Eliminiere 1:



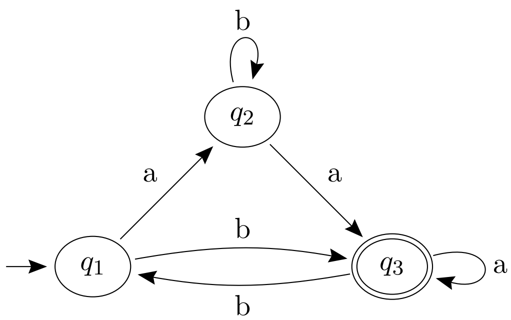
Eliminiere 2:



Der entstehende reguläre Ausdruck ist: $a(b(a|(aa)))^*$

Übungsaufgabe Ü3.4. (*Ardens Lemma*)

Gegeben sei folgender Automat $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_1, \{q_3\})$:



Berechnen Sie mit dem Gauß-Verfahren und Ardens Lemma einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L(M)$.

Lösungsskizze. Gleichungssystem:

$$X_1 \equiv aX_2 \mid bX_3 \tag{1}$$
$$X_2 \equiv aX_3 \mid bX_2 \tag{2}$$
$$X_3 \equiv aX_3 \mid bX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon} \tag{3}$$

Gleichung (2) nach X_2 auflösen und in (1) einsetzen:

$$X_2 \equiv b^* a X_3 \tag{4}$$
$$X_1 \equiv ab^*aX_3 \mid bX_3 \equiv (ab^*a \mid b)X_3 \tag{5}$$

Gleichung (5) in (3) einsetzen und auflösen:

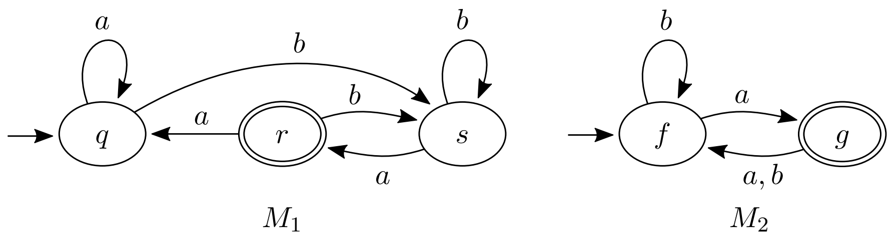
$$X_3 \equiv aX_3 \mid b(ab^*a \mid b)X_3 \mid \boldsymbol{\epsilon} \tag{6}$$
$$\equiv (a \mid b(ab^*a \mid b))^* \tag{7}$$
$$\equiv (a \mid bb \mid bab^*a)^* \tag{8}$$

Einsetzen in (5):

$$X_1 \equiv \alpha \equiv (ab^*a \mid b)(a \mid bb \mid bab^*a)^* \tag{9}$$

Übungsaufgabe Ü3.5. (*Produktkonstruktion*)

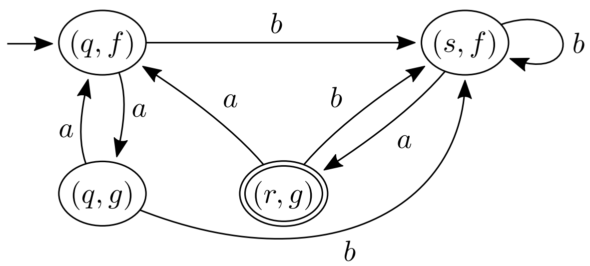
(a) Konstruieren Sie einen DFA M mit $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$, indem Sie die Produktkonstruktion verwenden. Ist M minimal?



(b) Konstruieren Sie nun einen Automaten für $L(M_1) \cup L(M_2)$.

Lösungsskizze.

(a)



Der DFA M ist nicht minimal. Er akzeptiert die gleiche Sprache wie M_1.

(b) Wir können das Ergebnis aus (a) wiederverwenden. Wir müssen nur die Finalzustände ändern. Es sind nun (q, g) und (r, g) Endzustände.

Übungsaufgabe Ü3.6. (*Noch mehr Abschlussspaß*)

In der Vorlesung haben Sie verschiedenste Abschlusseigenschaften von regulären Sprachen gesehen. In dieser Aufgabe beweisen wir eine weitere solche Abschlusseigenschaft.

Betrachte zwei Alphabete Σ, Δ und eine Funktion $h : \Sigma \to \Delta^*$, die Buchstaben aus Σ zu Wörter in Δ^* umwandelt.

Jede solche Funktion kann rekursiv auf eine Funktion $h^* : \Sigma^* \to \Delta^*$ erweitert werden, die Wörter aus Σ^* zu Wörter in Δ^* umwandelt, indem sie sukzessiv die Buchstaben des Eingabewortes mit Hilfe von h transformiert. Formell:

$$h^*(\epsilon) \coloneqq \epsilon \qquad \text{und} \qquad h^*(aw) \coloneqq h(a)h^*(w) \quad \text{für } a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$$

Beispiel: Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Delta = \{T, H, \heartsuit, E, O\}$ und $h : \Sigma \to \Delta^*$ definiert durch

$$h(a) \coloneqq EO \qquad h(b) \coloneqq \heartsuit \qquad h(c) \coloneqq TH$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} h^*(cab) &= h(c)h^*(ab) = h(c)h(a)h^*(b) = h(c)h(a)h(b)h^*(\epsilon) = h(c)h(a)h(b) \\ &= THh(a)h(b) = THEOh(b) = THEO\heartsuit \end{aligned}$$

Sei L nun eine Sprache über dem Alphabet Σ und $h : \Sigma \to \Delta^*$ ein Funktion. Wir definieren $h(L) \coloneqq \{h^*(w) \mid w \in L\}$. Beachte, dass $h(L) \subseteq \Delta^*$.

Zeigen Sie: wenn L regulär ist, dann ist auch $h(L)$ regulär. Für Ihren Beweis dürfen Sie folgende Gleichungen für alle Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ ohne Beweis verwenden[1]:

(i) $h(L_1 \cup L_2) = h(L_1) \cup h(L_2)$

(ii) $h(L_1 L_2) = h(L_1)h(L_2)$

(iii) $h(L_1^*) = h(L_1)^*$

Lösungsskizze. Sei r ein regulärer Ausdruck für L. Wir definieren einen neuen regulären Ausdruck $H(r)$ rekursiv:

- $H(\boldsymbol{\emptyset}) = \boldsymbol{\emptyset}$
- $H(\boldsymbol{\epsilon}) = \epsilon$
- $H(\mathsf{a}) = \overline{h(a)}$, wobei $\overline{b_1 \cdots b_n} \coloneqq \mathsf{b}_1 \cdots \mathsf{b}_n$ für $b_1, \ldots, b_n \in \Delta$[2]
- $H(\alpha\beta) = H(\alpha)H(\beta)$
- $H(\alpha \mid \beta) = H(\alpha) \mid H(\beta)$
- $H(\alpha^*) = H(\alpha)^*$

Wir beweisen nun mittels struktureller Induktion, dass die Definition korrekt ist, d.h. $L(H(r)) = h(L(r))$.

Fall $r = \boldsymbol{\emptyset}$. Dann $L(H(\boldsymbol{\emptyset})) = L(\boldsymbol{\emptyset}) = \emptyset = h(\emptyset) = h(L(\boldsymbol{\emptyset}))$.

Fall $r = \boldsymbol{\epsilon}$. Dann $L(H(\boldsymbol{\epsilon})) = L(\boldsymbol{\epsilon}) = \{\epsilon\} = \{h(\epsilon)\} = h(\{\epsilon\}) = h(L(\boldsymbol{\epsilon}))$.

Fall $r = \mathsf{a}$. Sei $h(a) = b_1 \cdots b_n$.
Dann $L(H(\mathsf{a})) = L(\overline{h(a)}) = L(\mathsf{b}_1 \cdots \mathsf{b}_n) = \{b_1 \cdots b_n\} = \{h(a)\} = h\{a\} = h(L(\mathsf{a}))$.

[1] die Beweise überlassen wir Ihnen als Übung.

[2] Beachte: a ist ein regulärer Ausdruck. Diesen möchten wir mit $H(\cdot)$ in einen neuen regulären Ausdruck übersetzen. Hierfür verwenden wir den zu a korrespondierenden Buchstaben a. Diesen können wir mit $h(\cdot)$ in ein Wort $h(a) = b_1 \cdots b_n$ wandeln. Dieses Wort müssen wir schließlich in den korrespondierenden regulären Ausdruck $\mathsf{b}_1 \cdots \mathsf{b}_n$ wandeln.

Fall $r = \alpha\beta$.

Als Induktionshypothesen erhalten wir $L(H(\alpha)) = h(L(\alpha))$ und $L(H(\beta)) = h(L(\beta))$. Wir folgern:

$$\begin{aligned} L(H(\alpha\beta)) = L(H(\alpha)H(\beta)) = L(H(\alpha))L(H(\beta)) &\overset{IH}{=} h(L(\alpha))h(L(\beta)) \\ &\overset{(ii)}{=} h(L(\alpha)L(\beta)) = h(L(\alpha\beta)) \end{aligned}$$

Fall $r = \alpha \mid \beta$ und $r = \alpha^*$.

Analog zu vorherigem Fall.