Prof. Javier Esparza
Kevin Kappelmann, Simon Roßkopf, Lukas Stevens

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2023 – Hausaufgabenblatt 12

Abgabe: 18.07.2023, 23:59

- Bitte beachten Sie, dass in dieser Vorlesung generell Antworten mit Begründung gefordert werden, solange die Aufgabe nicht explizit das Gegenteil sagt.
- Zum Bestehen diese Blattes müssen Sie 50% der Punkte erreichen.

Aufgabe H12.1. (*Wir bieten ein* dynamisches *Umfeld, Kicker, Obstkorb,...*) 2 + 0 Punkte

Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache in P.

(a) Zeigen Sie, dass die Sprache $\bigcup_{i=1}^{k} A^i = \{w_1 \cdots w_l \mid w_1, \ldots, w_l \in A \wedge l \leq k\}$ für jedes konstante $k \in \mathbb{N}_+$ ebenfalls in P liegt.

(b) (Optional) Zeigen Sie, dass A^+ in P liegt. **Tipp:** Verwenden Sie dynamische Programmierung.

Aufgabe H12.2. (*NP Quizzfire*) 0.5*6 Punkte

Entscheiden Sie ob folgende Aussagen wahr sind. Begründen Sie ihre Antwort kurz:

(a) Es gibt keine reguläre Sprache in NP.

(b) Jede Sprache in NP ist unendlich.

(c) Sei $L \in P$. Dann ist $\overline{L}$ unendlich.

(d) Wenn $A \in NP$ dann ist $A^* \in NP$.

(e) Sei $B \in P$ und $A \leq B$. Dann ist $A \in P$.

(f) Sei $A \leq_p B$, $B \leq_p SAT$, $SAT \leq_p A$. Dann sind A, B NP-vollständig.

Aufgabe H12.3. (*Total abge*SPACE*d*) 1 + 2 Punkte

Zeit ist nicht die einzig wertvolle Ressource der Komplexitätstheorie. Die Turingmaschinen der Praxis (aka Computer) besitzen leider nur endlich viel Speicher, weswegen auch der Speicherbedarf eines Programmes von Interesse ist. Wir werden uns daher in dieser Aufgabe auch ein wenig mit Speichergrenzen beschäftigen. Analog zu time_M und TIME aus der Vorlesung definieren wir hierzu:

- $\mathsf{space}_M(w)$: die Anzahl an verschiedenen, besuchten Zellen der DTM M bei Eingabe w.
- $\mathsf{SPACE}(f(n)) := \{A \subseteq \Sigma^* \mid \exists \mathsf{DTM}\, M.\ L(M) = A \wedge \forall w \in \Sigma^*.\ \mathsf{space}_M(w) \leq f(|w|)\}$.

(a) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total. Zeigen Sie: $\mathsf{TIME}(f(n)) \subseteq \mathsf{SPACE}(f(n))$.

(b) Sei PSPACE die Menge der Entscheidungsprobleme, die von deterministischen Turingmaschinen mit polynomiellem Platz entschieden werden können, d.h.

$$\text{PSPACE} := \bigcup_{k \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{O}(n^k)} \mathsf{SPACE}(f)$$

Sei EXPTIME die Menge der Entscheidungsprobleme, die von deterministischen Turingmaschinen in (einfach) exponentieller Zeit entschieden werden können, d.h.

$$\text{EXPTIME} := \bigcup_{k \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{O}(2^{n^k})} \mathsf{TIME}(f).$$

Zeigen Sie: PSPACE $\subseteq$ EXPTIME.

Tipp: betrachten Sie die Anzahl der Konfigurationen, in der sich eine polynomiell speicherbegrenzte TM befinden kann.

Aufgabe H12.4. (*Unbezahltes Praktikum*) 1 + 4 + 1 Punkte

Die TUM plant eine innovative neues Lehrveranstaltung; eine Mischung aus Seminar und Praktikum. In den ersten v Wochen der Veranstaltung gibt es jeweils einen Vortrag eines Studierenden, der zweite Teil besteht dann aus p Praktika. Dabei gibt es jedoch potenzielle Terminkonflikte: Von den insgesamt n Studierenden ist in jeder Woche $k \in \{1, \ldots, v\}$ nur eine Teilmenge S_k verfügbar, um einen Vortrag zu halten. Außerdem hat jedes Projekt als Voraussetzung, dass ein gewisser Vortrag gehalten wurde. Für jedes Projekt $i \in \{1, \ldots, p\}$, gibt es eine Menge P_i an Studierenden, von denen mindestens eine:r einen Vortrag gehalten haben muss, damit das Projekt bearbeitet werden kann.

Praktikum:

Gegeben: Endliche Menge S (Studierende), Anzahl Vorträge v, Anzahl Praktika p. Teilmengen $S_k \subseteq S$ (Verfügbarkeit in Woche k), $P_i \subseteq S$ (Voraussetzungen für Praktika)

Problem: Gibt es eine Zuordnung von Studierenden zu Veranstaltungswochen, sodass jede Woche genau ein Studierender (der/die in dieser Woche verfügbar ist) vorträgt und dass jedes Projekt bearbeitet werden kann.

(a) Zeigen Sie, dass Praktikum in NP liegt.

(b) Zeigen Sie, dass Praktikum NP-schwer ist, indem sie eine geeignete polynomielle Reduktion von 3KNF-SAT angeben. Zeigen Sie dabei auch die Korrektheit Ihrer Reduktion.

(c) Wenden Sie Ihre Reduktionsfunktion auf die folgende Instanz von 3KNF-SAT an:

$$(x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Vergewissern Sie sich, dass Ihr Ergebnis Sinn macht, also dass eine erfüllende Belegung für die SAT Instanz eine Lösung für die Praktikum Instanz ergibt und umgekehrt.

Aufgabe H12.5. (*München ist gerettet, Dietersheim ist in Not*) Nur Freundschaftspunkte

Diese Aufgabe ist optional und schließt das Kapitel Dr. Evilsparza ab.

Trotz all euren Bemühungen ist es Dr. Evilsparza gelungen, die heißumkämpfte Professur an der Freien Universität Dietersheim zu bekommen. Es ist nun wieder alles beim Alten: Dr. Evilsparza ist wieder Prof. Evilsparza und richtet großes Unheil an seiner Universität an. Der einzige Unterschied: das Unheil findet nun in Dietersheim und nicht mehr in München statt.

Eure Informatikerfreund:innen in Dietersheim sind davon ziemlich überfordert. Diese wilden Maschinen sind ihnen ganz unheimlich. Aufgebracht erzählen sie euch von ihrer neuesten Hausaufgabe, die natürlich niemand lösen kann. Doch nach all euren Abenteuern seid ihr nun Expertinnen, Maschinenkonstrukteure und -erzwingerinnen, echte Informatikerhandwerker:innen. Ein – nun aber wirklich – letztes Mal rettet ihr also die Welt und helft euren Dietersheimer Freund:innen bei ihren Hausaufgaben. Alle Augen sind auf euch. Die Angabe ist wie folgt:

“Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar und total. Zeigen Sie: Es existiert eine *entscheidbare* Sprache $L \notin \mathsf{TIME}(f(n))$. Verwenden Sie hierfür einen Diagonalisierungsansatz ähnlich zu Satz 5.33 aus der Vorlesung der Theoretischen Informatik der TU München.”

Da kribbelt es euch sofort in den Fingern. Eure THEO-Instinke sagen euch, dass die Sprache

$$L \coloneqq \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w[w] \text{ akzeptiert nicht in } \leq f(|w|) \text{ Schritten}\}.$$

zum Erfolg führen könnte. . .

> The more I think about language, the more it amazes me that people ever understand each other at all.
>
> — Kurt Gödel

Bonus: Eine schöne Antwort zu “What is the enlightenment I’m supposed to attain after studying finite automata?”

Vielen Dank für eure Mitarbeit, vor allem bei den Abenteuern mit ~~Dr~~Prof. Evilsparza. Wir wünschen viel Erfolg bei der Klausur und Freude beim zukünftigen THEOretisieren.