Prof. Javier Esparza
Kevin Kappelmann, Simon Roßkopf, Lukas Stevens

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2023 – Hausaufgabenblatt 11

Abgabe: 11.07.2023, 23:59

- Bitte beachten Sie, dass in dieser Vorlesung generell Antworten mit Begründung gefordert werden, solange die Aufgabe nicht explizit das Gegenteil sagt.
- Zum Bestehen diese Blattes müssen Sie 50% der Punkte erreichen.

Aufgabe H11.1. (*TMDFA*) 4 Punkte

Analog zu Turingmaschinen (M_w) können wir auch DFAs kodieren (D_w). Analog zu den Vorlesungsfolien, Seite 265, definieren wir dann

$$D_w := \begin{cases} D, & \text{falls } w \text{ Kodierung des DFAs } D \text{ ist} \\ \hat{D}, & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $\hat{D}$ ein beliebiger, fester DFA ist. Wir möchten zeigen, dass es unentscheidbar ist, ob eine Turingmaschine und ein DFA dieselbe Sprache erkennen. Wir definieren hierfür zunächst diese Problem formal:

$$TMDFA := \{w_1\#w_2 \mid w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \text{ und } L(M_{w_1}) = L(D_{w_2})\}$$

Reduzieren Sie nun das allgemeine Halteproblem $\mathcal{H}$ auf $TMDFA$.

Aufgabe H11.2. (*Freie Universität Dietersheim*) 3 Punkte

Ojemine! Dr. Evilsparzas is pleite. Sein Malomat hat – im Limit – die ganze unendliche Leinwand mit der sündhaft teuren Farbe bemalt. Aus diesem Grund sucht er sich wieder eine krisensicheren Job als Informatikprofessor, dieses mal an der Freien Universität Dietersheim. Bald könnte er also wieder Prof. Evilsparza sein! Um dies zu verhindern, versucht ihr ihn vor der Auswahlkommission bloßzustellen, indem ihr seine Ausführungen zur Unentscheidbarkeit als falsch entlarvt.

Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Bestimmen Sie jeweils, ob folgende Aussagen wahr sind. Falls ja, geben Sie eine kurze Begründung an, ansonsten ein Gegenbeispiel mit Begründung, warum das Gegenbeispiel korrekt ist.

(a) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ unentscheidbar und $w \in L$. Dann ist $\{v \mid M_w[v]\downarrow\}$ unentscheidbar.

(b) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total, berechenbar und bijektiv. Dann ist f^{-1} berechenbar.

(c) Für beliebige TMs M_1, M_2 ist die Sprache $L(M_1) \setminus L(M_2)$ semi-entscheidbar.

Aufgabe H11.3. (*Riceerisch*) 3 Punkte

Geben Sie für jede der folgenden Mengen in Aufgabe (a–c) an, ob sie entscheidbar ist oder nicht. Beweisen Sie ihre Behauptung mithilfe des Satzes von Rice. Ist der Satz von Rice nicht anwendbar, reicht es zu begründen warum der Satz nicht anwendbar ist. In diesem Fall müssen Sie nicht beweisen ob die Menge entscheidbar ist.

(a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists P. \forall n \in \mathbb{N}. P(n) = \varphi_w(n)\}$ wobei P ein GOTO Programm ist.

(b) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \{a,b\}^*. \exists n \in \mathbb{N}. \varphi_w(n) = x\}$.

(c) $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists n \in \mathbb{N}. \varphi_w(n) = 1 \wedge w \neq w^R\}$.

Aufgabe H11.4. (*Wilde Zustände*) 0 Punkte

(Optionale Aufgabe zum weiteren Üben): In dieser Aufgabe betrachten wir unerreichbare Zustände in Turingmaschinen. Ein Zustand q ist genau dann unerreichbar wenn es keine Eingabe w gibt, sodass die TM im Laufe der Auswertung mit Eingabe w eine Konfiguration (α, q, β) für beliebige α und β erreicht.

Wir kodieren hierzu Zustände in Analogie zu Turingmaschinen und definieren:

$$q_{w_1,w_2} := \begin{cases} q, & \text{falls } w_2 \text{ Kodierung von } q \text{ in } M_{w_1} \text{ ist} \\ \hat{q}, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $\hat{q}$ ein beliebiger aber fester Zustand in M_{w_1} ist.

Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathsf{A}_{\mathrm{UR}} := \{w_1\#w_2 \mid w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \text{ und } q_{w_1,w_2} \text{ ist in } M_{w_1} \text{ unerreichbar}\}$$

unentscheidbar ist, indem Sie eine Reduktion durchführen.