Prof. Javier Esparza
Kevin Kappelmann, Simon Roßkopf, Lukas Stevens

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2023 – Hausaufgabenblatt 11

- Bitte beachten Sie, dass in dieser Vorlesung generell Antworten mit Begründung gefordert werden, solange die Aufgabe nicht explizit das Gegenteil sagt.
- Zum Bestehen diese Blattes müssen Sie 50% der Punkte erreichen.
- Update: es wird Aufgabe 1 korrigiert.

Aufgabe H11.1. (*TMDFA*) 4 Punkte

Analog zu Turingmaschinen (M_w) können wir auch DFAs kodieren (D_w). Analog zu den Vorlesungsfolien, Seite 265, definieren wir dann

$$D_w := \begin{cases} D, & \text{falls } w \text{ Kodierung des DFAs } D \text{ ist} \\ \hat{D}, & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $\hat{D}$ ein beliebiger, fester DFA ist. Wir möchten zeigen, dass es unentscheidbar ist, ob eine Turingmaschine und ein DFA dieselbe Sprache erkennen. Wir definieren hierfür zunächst dieses Problem formal:

$$TMDFA := \{w_1\#w_2 \mid w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \text{ und } L(M_{w_1}) = L(D_{w_2})\}$$

Reduzieren Sie nun das allgemeine Halteproblem $\mathcal{H}$ auf $TMDFA$.

Lösungsskizze. Es gilt zu beachten, dass die Reduktion total, berechenbar und korrekt sein muss.

Reduktion von $\mathcal{H}$: Für gegebenes $w\#x$ konstruieren wir zunächst die Kodierung w_1 einer Turingmaschine, die bei Eingaben $v \neq x$ ablehnt und bei Eingabe $v = x$ $M_w[x]$ laufen lässt. Wenn die Maschine hält, akzeptieren wir. Sonst lehnen wir x ab. Außerdem konstruieren wir die Kodierung w_2 eines DFAs, der nur x akzeptiert. Wir geben $w_1\#w_2$ zurück. Für Eingaben nicht der Form $w\#x$ geben wir ϵ zurück.

Die Reduktion ist total: Für jede Eingabe wird eine Ausgabe erzeugt (insbesondere, wenn die Eingabe nicht von der Form $w\#x$ ist!)

Die Reduktion ist berechenbar: Die En- und Dekodierungsfunktionen für Turingmaschinen und DFAs sind berechenbar. Außerdem kann eine TM seine Eingabe v mit x vergleichen und dann gegebenenfalls eine andere TM simulieren.

Die Reduktion ist korrekt:

$$\begin{aligned}
w\#x \in \mathcal{H} &\iff M_w[x]\downarrow && \text{(Def. } \mathcal{H}\text{)} \\
&\iff x \in L(M_{w_1}) && (M_{w_1}[x] \text{ führt } M_w[x] \text{ aus und akzeptiert bei Halten}) \\
&\iff L(M_{w_1}) = \{x\} && (M_{w_1}[v] \text{ lehnt } v \neq x \text{ sofort ab}) \\
&\iff L(M_{w_1}) = \{x\} = L(D_{w_2}) && \text{(Definition von } w_2\text{)} \\
&\iff w_1\#w_2 \in TMDFA && \text{(Def. } TMDFA\text{)}
\end{aligned}$$

□

Aufgabe H11.2. (*Freie Universität Dietersheim*) 3 Punkte

Ojemine! Dr. Evilsparzas is pleite. Sein Malomat hat – im Limit – die ganze unendliche Leinwand mit der sündhaft teuren Farbe bemalt. Aus diesem Grund sucht er sich wieder eine krisensicheren Job als Informatikprofessor, dieses mal an der Freien Universität Dietersheim. Bald könnte er also wieder Prof. Evilsparza sein! Um dies zu verhindern, versucht ihr ihn vor der Auswahlkommission bloßzustellen, indem ihr seine Ausführungen zur Unentscheidbarkeit als falsch entlarvt.

Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Bestimmen Sie jeweils, ob folgende Aussagen wahr sind. Falls ja, geben Sie eine kurze Begründung an, ansonsten ein Gegenbeispiel mit Begründung, warum das Gegenbeispiel korrekt ist.

(a) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ unentscheidbar und $w \in L$. Dann ist $\{v \mid M_w[v]\downarrow\}$ unentscheidbar.

(b) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total, berechenbar und bijektiv. Dann ist f^{-1} berechenbar.

(c) Für beliebige TMs M_1, M_2 ist die Sprache $L(M_1) \setminus L(M_2)$ semi-entscheidbar.

Lösungsskizze.

(a) Falsch. Sei L eine beliebige unentscheidbare Sprache (z.B. $\mathcal{H}_0$) und w die Kodierung einer TM, die nie hält (also $L(M_w) = \emptyset$). Dann ist $L \cup \{w\}$ immer noch unentscheidbar, aber $\{v \mid M_w[v]\downarrow\} = \emptyset$ ist entscheidbar.

(b) Wahr. Um $f^{-1}(y)$ zu berechnen, gehen wir alle möglichen $x \in \mathbb{N}$ durch und überprüfen, ob $f(x) = y$ gilt. Da f berechenbar ist, können wir dies machen, und da f bijektiv ist, terminiert die Suche mit einem x, das wir ausgeben.

(c) Falsch. Wähle $L(M_1) = \Sigma^*$ und $L(M_2) = \mathcal{H}_0$, das Halteproblem auf leerem Band. Diese sind beide semi-entscheidbar, daher gibt es TMs für diese Sprachen. Nun ist $L(M_1) \setminus L(M_2)$ das Komplement des Halteproblems und damit nicht semi-entscheidbar.

Aufgabe H11.3. (*Riceerisch*) 3 Punkte

Geben Sie für jede der folgenden Mengen in Aufgabe (a–c) an, ob sie entscheidbar ist oder nicht. Beweisen Sie ihre Behauptung mithilfe des Satzes von Rice. Ist der Satz von Rice nicht anwendbar, reicht es zu begründen warum der Satz nicht anwendbar ist. In diesem Fall müssen Sie nicht beweisen ob die Menge entscheidbar ist.

(a) $L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \exists P. \forall n \in \mathbb{N}. P(n) = \varphi_w(n)\}$ wobei P ein GOTO Programm ist.

(b) $L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \forall x \in \{a, b\}^*. \exists n \in \mathbb{N}. \varphi_w(n) = x\}$.

(c) $L_3 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \exists n \in \mathbb{N}. \varphi_w(n) = 1 \wedge w \neq w^R\}$.

Lösungsskizze.

(a) Für jede Funktion φ_w gibt es ein äquivalentes GOTO Programm. Damit ist L_1 die Menge aller berechenbaren Funktionen und somit trivial entscheidbar.

(b) L_2 ist unentscheidbar. Beweis: Man setzt $F = \{f \mid f \text{ berechenbar } \wedge \forall x \in \{a, b\}^*. \exists n \in \mathbb{N}. f(n) = x\}$. Es gilt $F \neq \emptyset$ da man die Wörter in $\{a, b\}^*$ enumerieren kann. (z.B. $(0, a), (1, b), (2, aa), (3, ab), (4, ba), (5, bb), (6, aaa), \ldots$)

Außerdem gibt es offensichtlich Funktionen $\varphi_w \notin F$. Damit ist der Satz von Rice mit $L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \varphi_w \in F\}$ anwendbar und es folgt die Behauptung.

(c) Die Menge ist unentscheidbar, jedoch ist der Satz von Rice nicht anwendbar. Für den Satz von Rice müsste es eine nicht-triviale Menge F an berechenbaren Funktionen geben, sodass $L_3 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \phi_w \in F\}$. Das Problem ist, dass mehrere Kodierungen existieren können, deren Maschinen die gewünschte Funktion ($\exists n \in \mathbb{N}.\varphi_w(n) = 1$) berechnen, von denen jedoch manche Palindrome sind und manche nicht. Somit ist F nicht definierbar.

Aufgabe H11.4. (*Wilde Zustände*) 0 Punkte

(Optionale Aufgabe zum weiteren Üben): In dieser Aufgabe betrachten wir unerreichbare Zustände in Turingmaschinen. Ein Zustand q ist genau dann unerreichbar wenn es keine Eingabe w gibt, sodass die TM im Laufe der Auswertung mit Eingabe w eine Konfiguration (α, q, β) für beliebige α und β erreicht.

Wir kodieren hierzu Zustände in Analogie zu Turingmaschinen und definieren:

$$q_{w_1,w_2} := \begin{cases} q, & \text{falls } w_2 \text{ Kodierung von } q \text{ in } M_{w_1} \text{ ist} \\ \hat{q}, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $\hat{q}$ ein beliebiger aber fester Zustand in M_{w_1} ist.

Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathsf{A}_{\mathrm{UR}} := \{w_1\#w_2 \mid w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \text{ und } q_{w_1,w_2} \text{ ist in } M_{w_1} \text{ unerreichbar}\}$$

unentscheidbar ist, indem Sie eine Reduktion durchführen.

Lösungsskizze. Wir reduzieren das Komplement des Halteproblems auf leerem Band $\overline{\mathcal{H}_0}$ auf A_{UR}.

- *Reduktion von $\overline{\mathcal{H}_0}$:* Sei $w \in \{0,1\}^*$ beliebig. Wir berechnen zunächst die Kodierung w' einer Turingmaschine mit genau einem Endzustand q_{accept}, dessen Kodierung w_{accept} ist. $M_{w'}$ löscht bei jeder Eingabe das Band, führt dann $M_w[\epsilon]$ aus und geht anschließend in den Zustand q_{accept} über. Dann wird $w'\#w_{\text{accept}}$ zurückgegeben.
- *Die Reduktion ist total:* Für jede Eingabe w wird die Ausgabe $w'\#w_{\text{accept}}$ erzeugt.
- *Die Reduktion ist berechenbar:* Die En- und Dekodierungsfunktionen für Turingmaschinen und Zustände sind berechenbar. Außerdem kann eine TM alle Zeichen auf dem Band, die nicht dem Leerzeichen entsprechen, durch geeignete Übergänge anfangs überschreiben.
- *Die Reduktion ist korrekt:* Intuitiv ist der Zustand q_{accept} genau dann erreichbar wenn M_w auf leerer Eingabe hält.

$$\begin{aligned} w \in \overline{\mathcal{H}_0} &\iff M_w[\epsilon]\uparrow && \text{(Def. } \mathcal{H}_0\text{)} \\ &\iff \forall x \in \Sigma^*.\ M_{w'}[x]\uparrow && (M_{w'} \text{ führt stets } M_w \text{ auf leerem Band aus)} \\ &\iff \forall x \in \Sigma^*.(q_{\text{accept}} \text{ wird in } M_{w'} \text{ nicht erreicht}) && \text{(Def. } M_{w'}\text{)} \\ &\iff w'\#w_{\text{accept}} \in \mathsf{A}_{\mathrm{UR}} && \text{(Def. } \mathsf{A}_{\mathrm{UR}}\text{)} \end{aligned}$$

□