Prof. Javier Esparza
Kevin Kappelmann, Simon Roßkopf, Lukas Stevens

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2023 – Hausaufgabenblatt 10

Abgabe: 04.07.2023, 23:59

- Bitte beachten Sie, dass in dieser Vorlesung generell Antworten mit Begründung gefordert werden, solange die Aufgabe nicht explizit das Gegenteil sagt.
- Zum Bestehen diese Blattes müssen Sie 50% der Punkte erreichen.

Aufgabe H10.1. (*Falsch/Wahr*) 4 Punkte

Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie ihre Behauptung. Ein ausführlicher formaler Beweis ist nicht gefordert, aber eine umfassende Begründung.

(a) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine unentscheidbare Sprache, $w \in \Sigma^*$. L lässt sich mittels $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit

$$f(x) = \begin{cases} w, \text{wenn } x \in L \vee x = w \\ x, \text{sonst} \end{cases}$$

auf $L \cup \{w\}$ reduzieren.

(b) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine unentscheidbare Sprache, $w \in \Sigma^*$. $L \cup \{w\}$ ist unentscheidbar.

(c) Sei $\Sigma = \{a\}$. Alle Sprachen über Σ sind entscheidbar.

(d) Sei L^* eine entscheidbare Sprache. L ist entscheidbar.

Aufgabe H10.2. (*Hmm*) 4 Punkte

Für die folgenden Aufgaben dürfen Sie annehmen, dass das Halteproblem für WHILE- und GOTO-Programme auf Eingabe 0 unentscheidbar ist. Wir nummerieren die Anweisungen eines Programms fortlaufend, wobei wir die Bedingung eines IFs bzw. WHILEs als eigene Anweisung betrachten.

(a) Ist es entscheidbar, ob bei der Ausführung eines WHILE-Programms P auf Eingabe 0 die zweite Anweisung mindestens einmal ausgeführt wird?

(b) Ist es entscheidbar, ob bei der Ausführung eines GOTO-Programms P auf Eingabe 0 die zweite Anweisung mindestens einmal ausgeführt wird?

Aufgabe H10.3. (*Verwhilen*) 3 + 3 Punkte

Es seien $f, g : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ zwei berechenbare, partielle Funktionen. Wir definieren die Menge der Summen von Eingaben, auf denen f und g mit Ausgabe 1 terminieren, wie folgt:

$$S \coloneqq \{x + y \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge f(x) = g(y) = 1\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die partielle Funktion $f + g$, definiert als

$$f + g(z) :=
\begin{cases}
1, & \text{falls } z \in S \\
\bot, & \text{sonst}
\end{cases},$$

ebenfalls berechenbar ist. Sie dürfen hierfür annehmen, dass sie Programme P_f, P_g für f, g in einer beliebigen, Turing-vollständigen Sprache besitzen. Erläutern Sie, wie Sie dann ein Programm P_{f+g} für $f + g$ schreiben können.

(b) Lösen Sie nun die vorherige Aufgabe konkret für WHILE-Programme. D.h. gegeben WHILE-Programme P_f, P_g für f, g, erstellen Sie ein neues WHILE-Programm P_{f+g} für $f + g$. In ihrem Programm dürfen Sie bei Zuweisungen und in Bedingungen beliebige arithmetische Ausdrücke $(+, -, \leq)$ verwenden. Weiterhin sind alle aussagenlogischen Operatoren $(\wedge, \neg, \vee)$ und Gleichheit $(=)$ in Bedingungen erlaubt. *Tipp:* Verwenden Sie Korollar 5.26.

Aufgabe H10.4. (*Dr. Evilangelo*) 3 + 3 + 5 Punkte + Schokoladenpreis

Dr. Evilsparza hat es geschafft: seine Schleifomaten sind allmächtig und er kann sich endlich zur Ruhe setzen. Am Freitagabend hat er nun gemütlich – wie man es als kulturaffiner Bösewicht im Ruhestand eben so tut – ZDF-aspekte geschaut. Dort ging es um zeitgenössische Kunst und die Ausaneindersetzung der Künstler:innen mit ihrer Vergangenheit. Das fand der Superschurke so inspirierend, dass er kurzum seine ehemalige Werkstube in ein Atelier verwandelte. Er möchte es den Künstler:innen auf aspekte gleichtun und sich kunstvoll mit seiner Vergangenheit als Maschinenbösewicht auseinandersetzen.

Doch so ganz scheint es mit der Kunst leider nicht zu funktionieren: es fehlt ihm die notwendige Technik. Da kommt ihm eine Idee: er entwickelt einfach eine Maschine, die das Malen für ihn übernimmt. Eine geniale Verbindung seiner Vergangenheit und seines modernen Ichs! Seine Erfindung nennt er den *Malomat*.

Ein *Malomat* M ist ähnlich zu einer *deterministischen* Turingmaschine, besitzt allerdings anstatt eines unendlich langen, eindimensionalen Bandes eine unendlich große, zweidimensionale Leinwand und kann sich zusätzlich auf und ab bewegen, dafür aber nie stillstehen. Formal ist ein Malomat ein 4-Tupel (Q, Γ, δ, q_0), wobei

(a) $Q \neq \emptyset$ die endliche Zustandsmenge,

(b) $\Gamma \neq \emptyset$ die endliche Farbpalette,

(c) $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\uparrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow\}$ die Übergangsfunktion und

(d) $q_0 \in Q$ der Startzustand ist.

Analog zu deterministischen Turingmaschinen können Malomaten auch graphisch als gelabelte Graphen dargestellt werden (siehe Beispiel unten).

Ein Malomat erhält als Eingabe eine voreingefärbte Leinwand. Diese lässt sich durch eine Funktion $f : \mathbb{Z}^2 \to \Gamma$ darstellen. Eine Konfiguration eines Malomats ist dann ein Tripel (q, p, f), wobei $q \in Q$ der aktuelle Zustand, $p \in \mathbb{Z}^2$ die aktuelle Position (des Kopfs/Pinsels) und $f : \mathbb{Z}^2 \to \Gamma$ die aktuelle Leinwand ist. Die Übergangsrelation $\to_M$ ist dann wie folgt definiert: Falls $\delta(q, f(x, y)) = (q', c, D)$, dann

$$(q, (x, y), f) \to_M
\begin{cases}
(q', (x, y + 1), f'), & \text{falls } D = \uparrow \\
(q', (x + 1, y), f'), & \text{falls } D = \rightarrow \\
(q', (x, y - 1), f'), & \text{falls } D = \downarrow \\
(q', (x - 1, y), f'), & \text{falls } D = \leftarrow
\end{cases},$$

wobei

$$f'(x',y') := \begin{cases} c, & \text{falls } x = x' \text{ und } y = y' \\ f(x',y'), & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Initialposition eines Malomats ist dabei stets der Ursprung $(0,0) \in \mathbb{Z}^2$. Beachten Sie: Malomaten sind fleißige Maler – sie halten nämlich nie.

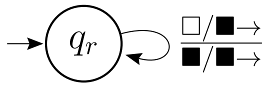
Dr. Evilangelo hat nun verschiedene schwarz-weiß Gemälde für seine weißen Leinwände entworfen. Wir betrachen also die Farbpalette $\Gamma := \{\square, \blacksquare\}$ (weiß und schwarz) und die weiße Eingabeleinwand $f_w : \mathbb{Z}^2 \to \Gamma, (x,y) \mapsto \square$. Wir sagen, dass ein *Malomat M ein Gemälde $G \subseteq \mathbb{Z}^2$ malt*, falls M mit Farbpalette Γ bei Eingabe f_w

(a) jede beliebige, fixierte Position $(x,y) \in G$ nach endlich vielen Schritten schwarz einfärbt,

(b) keine schwarz eingefärbte Position jemals weiß übermalt und

(c) keine Position $(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus G$ jemals schwarz einfärbt.

Beispiel: Der folgende Malomat malt das Gemälde $\mathbb{N} \times \{0\}$.



Helft Dr. Evilangelo nun die folgenden Gemälde zu malen. Beschreibt für jede der folgenden Konstruktion auch eure Idee informell. Die Korrektheit der Konstruktionen müsst ihr nicht beweisen.

(a) Geben Sie einen Malomat *graphisch* an, der das Gemälde $G_1 := \{(n,n) \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ ist gerade}\}$ malt. Ihr Malomat darf *maximal 5 Zustände* benutzen.

(b) Geben Sie einen Malomat *graphisch* an, der das Gemälde $G_2 := \{(i,i) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ malt. Ihr Malomat darf *maximal 6 Zustände* benutzen.

(c) Geben Sie einen Malomat *graphisch* an, der das Gemälde $V := \mathbb{Z}^2$ malt. Ihr Malomat darf *maximal 15 Zustände* benutzen.

    Hinweis: Ursprünglich wurde hier vom Gemälde $\mathbb{N}^2$ gesprochen. Dies war ein Fehler – Dr. Evilangelo möchte natürlich die ganze Leinwand und nicht nur einen Teil davon bemalt sehen. Lösungen für das Gemälde $\mathbb{N}^2$ werden für den Bonus berücksichtigt, sind allerdings vom folgenden Wettbewerb ausgeschlossen.

    Dr. Evilangelos Helfer – Mr. Kevin Malomann – hat bereits eine Lösung mit 12 Zuständen gefunden. Dr. Evilangelo findet eine so große Anzahl an Zuständen jedoch höchst verschwenderisch. Seine Kunst soll nicht nur ansprechend, sondern auch nachhaltig sein. Er schreibt daher einen Preis aus: Die Künstlergruppe des Malomats mit der kleinsten Anzahl an Zuständen gewinnt einen Schokoladenpreis, überreicht in der berühmten Theovorlesung von Dr. Evilangelo. Wenn ihr teilnehmen möchtet, sendet eure Lösung per Email an theoleitung@in.tum.de, Betreff: Einreichung Malomat.