Prof. Javier Esparza
Kevin Kappelmann, Simon Roßkopf, Lukas Stevens

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

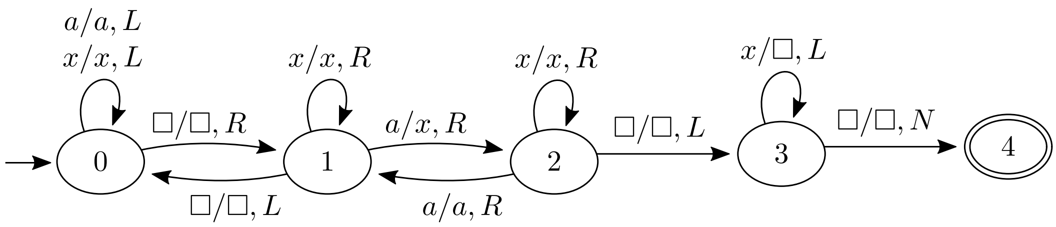
Sommersemester 2023 – Hausaufgabenblatt 9

Abgabe: 27.06.2023, 23:59

- Bitte beachten Sie, dass in dieser Vorlesung generell Antworten mit Begründung gefordert werden, solange die Aufgabe nicht explizit das Gegenteil sagt.
- Zum Bestehen diese Blattes müssen Sie 50% der Punkte erreichen.

Aufgabe H9.1. (*Jeu de mots*) 4 Punkte

Der Archäologe Jasper Vazarie hat eine antike Maschine ausgegraben und braucht Ihre Hilfe, um deren Bedeutung zu verstehen. Welche Sprache $L \subseteq \{a\}^*$ akzeptiert die folgende Maschine?



Begründen Sie Ihre Antwort und beschreiben Sie, wieso die TM die von ihnen genannte Sprache akzeptiert.

Tipp: Es gibt verschiedene Webseiten auf denen Turingmaschinen interaktiv konstruiert und simuliert werden können, z.B. `https://wimmers.github.io/turing-machine-viz/`oder `https://turingmachinesimulator.com/`.

Aufgabe H9.2. (*...sehen deine Schuhe prima aus!*) 4 + 0 Punkte

Dr. Evilsparza lacht sich ins Fäustchen: endlich hat er eine allmächtige Unheilmaschine, den Schleifomaten, erfunden. Diese sind sogar mächtiger als Kellerautomaten, das habt ihr schließlich auf dem letzten Hausaufgabenblatt gezeigt... oder etwa nicht? Auf dem vorherigen Blatt habt ihr tatsächlich nur gezeigt, dass ein Schleifomat für eine nicht-kontextfreie Sprachen existiert. Aber können Sie auch wirklich alle kontextfreie Sprachen erkennen?

Ziel dieser Aufgabe ist es, Dr. Evilsparza endgültig zu überzeugen, dass Schleifomaten mächtiger als Kellerautomaten sind. Tatsächlich werdet ihr Dr. Evilsparza eine große Freude machen und sogar zeigen, dass sie mindestens so mächtig wie Turingmaschinen (und somit strikt mächtiger als Kellerautomaten) sind.

Wir definieren eine alternative Akzeptanzbedingung für Schleifomaten: Ein Schleifomat A mit Endzuständen ist ein 7-Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$. Die ersten 6 Einträge bleiben unverändert, wie auf Hausaufgabenblatt 8 definiert. Der neue Eintrag $F \subseteq Q$ kennzeichnet die Endzustände des Schleifomats. Die mit Endzuständen akzeptierte Sprache eines Schleifomats ist definiert als

$$L_F(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists q_f \in F, \gamma \in \Gamma^*. \ (q_0, w, Z_0) \to_M^* (q_f, \epsilon, \gamma)\},$$

wobei γ die Ausgabe der Berechnung des Schleifomats ist. Wie auch bei Turingmaschinen nehmen wir an, dass $\delta(q_f, a)$ nicht definiert ist für $q_f \in F$ und $a \in \Gamma$.

(a) Beschreiben Sie, wie jede deterministische Turingmaschine durch einen Schleifomat mit Endzuständen simuliert werden kann. Dabei soll sowohl die Akzeptanz eines Wortes als auch die Ausgabe der Turingmaschine simuliert werden. Letzteres bedeutet, dass falls eine TM mit Band $\Box \cdots \Box w_1 \cdots w_n \Box \cdots \Box$ mit $w_1, \ldots, w_n \in \Gamma$ hält, die Schleife schlussendlich bei $\Box^k w_1 \cdots w_n \Box^m$ für beliebiges $k, m \in \mathbb{N}$ stehen soll. Ein ungültiger, finaler Schleifeninhalt wäre hingegen $w_2 \cdots w_n w_1$. Die finale Kopfposition der TM muss nicht ersichtlich sein.

Tipp: Bilden sie eine Konfiguration (v, q, w) der TM durch ein Wort $vqw\#$ in der Schleife ab.

(b) (Optional) Geben Sie nun ihre Konstruktion formal an (d.h. jede Komponente des 7-Tupels muss präzise definiert sein). Die Korrektheit der Konstruktion müssen Sie nicht beweisen.

Aufgabe H9.3. (*Wahr/Falsch*) 7*1 Punkte

Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie ihre Behauptung. Ein ausführlicher formaler Beweis ist nicht gefordert, aber eine umfassende Begründung.

(a) Die Klasse der "ruhelosen" Turingmaschinen die ihren Kopf in jedem Schritt bewegen müssen (d.h für alle Transition $\delta(q, a) = (q', b, D)$ muss $D \neq N$ sein) akzeptiert genau die Typ-0 Sprachen.

(b) Die Klasse der nichtdeterministischen Turing Maschinen die jede Zelle ihres Bandes höchstens zweimal ändern akzeptiert genau die Typ-0 Sprachen. Eine Transition $\delta(q, a) = (q', b, D)$ ändert eine Zelle wenn $a \neq b$.

(c) Die Klasse der nichtdeterministischen Turing Maschinen die jede Zelle ihres Bandes höchstens einmal ändern akzeptiert genau die kontextsensitiven Sprachen.

(d) Jede reguläre Sprache kann von einer Turingmaschine akzeptiert werden die keine Zelle auf ihrem Band ändert.

(e) Jede Sprache die von einer nicht-deterministischen Turingmaschine akzeptiert wird welche kein Leerzeichen überschreibt ist kontextfrei.

(f) Jede Sprache die von einer deterministischen Turingmaschine akzeptiert wird wird auch von einer nichtdeterministischen Turing Maschine akzeptiert.

(g) In einem unzerstörbaren, unknackbaren, uneinsehbaren Safe befindet sich ein Zettel auf dem eine jedem unbekannte natürliche Zahl z steht. Die Funktion

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = z \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist berechenbar.