Prof. Javier Esparza
Kevin Kappelmann, Simon Roßkopf, Lukas Stevens

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2023 – Hausaufgabenblatt 7

- Bitte beachten Sie, dass in dieser Vorlesung generell Antworten mit Begründung gefordert werden, solange die Aufgabe nicht explizit das Gegenteil sagt.
- Zum Bestehen diese Blattes müssen Sie 50% der Punkte erreichen.
- Dr. Evilsparza genießt das StuStaCulum und erwartet euch erst nächste Woche wieder mit fiesen Automatenkonstruktionen.
- Update: Es werden die Aufgaben 3(a–b) korrigiert.

> Auf der folgenden Website können Sie PDAs konstruieren, simuliereren, testen,...
> https://automatonsimulator.com/
> Beachten Sie dabei: die PDAs auf der Website starten mit leerem Keller und akzeptieren mit Endzustand.

AT-Aufgabe H7.1. (*VerCYKendes KlapPDAch*) 0 Punkte

Bearbeiten Sie folgende Aufgabe mit Automata Tutor.

Bearbeiten Sie die Hausaufgaben H7.1 (a–f). Bei den *PDA construction* Aufgaben darf ihr konstruierter PDA nicht zu viele Zustände oder zu viele Stacksymbole haben (siehe Aufgabenstellung). Wenn Sie einen ε-Übergang angeben wollen, geben Sie statt ε bitte `E` ein (siehe Hinweisbox über Canvas). Die Simulation bei PDAs ist deaktiviert. Bitte wundern Sie sich nicht, dass bei einem Klick auf `Start Simulation` nichts passiert.

Lösungsskizze.

(a)

1,5 G, T				
1,4 G	2,5 T			
1,3 S, T	2,4 T, G	3,5 T		
1,2 T	2,3 S, G	3,4 G	4,5 G	
1,1 G	2,2 S	3,3 S, L	4,4 S	5,5 S
y	t	u	t	t

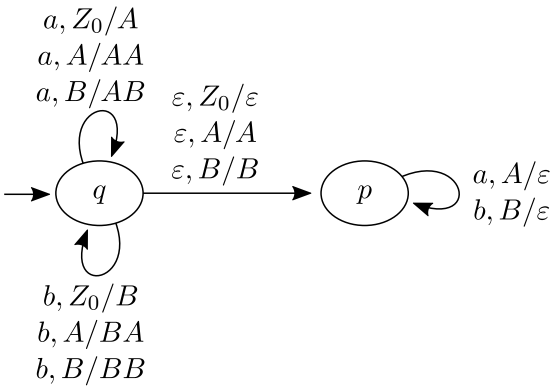
(b)

1,5 C, F, L, S				
1,4 C, L, S	2,5 C, F, L, S			
1,3 C	2,4 C, L, S	3,5 C, L, S		
1,2 S, C	2,3 C	3,4 D, L	4,5 C, S	
1,1 F, L	2,2 C, D, L, S	3,3 S	4,4 F, L	5,5 C, D, L, S
d	e	p	d	e

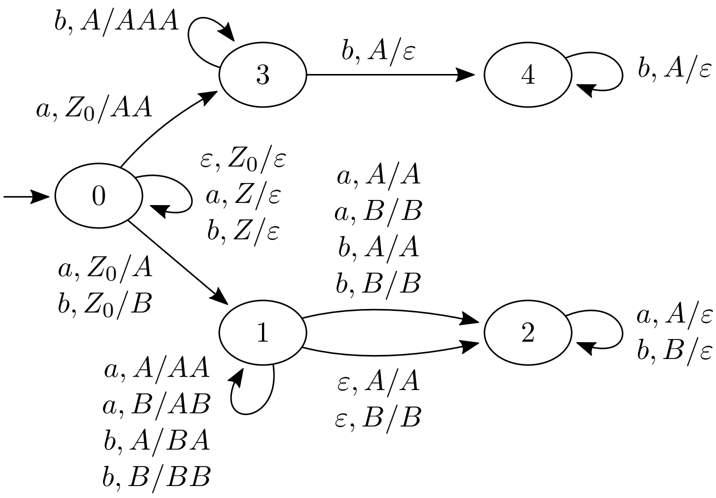
(c) $\epsilon, aabccb, acbccb \in L$ und $b, bb, abb \notin L$

(d) $\epsilon, aaabbaaa, ababbaba \in L$ und $bbb, aab, aaabaaa \notin L$

(e)



(f)



Aufgabe H7.2. (*Zuschnitt*) 4 Punkte

Sei $\Sigma := \{a, b\}$, $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik in CNF und $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA. Wir wollen nun eine kontextfreie Grammatik $G' = (V', \Sigma, P', S')$ für $L(G) \cap L(M)$ erzeugen, und damit beweisen, dass die kontextfreien Sprachen abgeschlossen unter Schnitt mit regulären Sprachen sind.

Dazu verwenden wir Variablen $V' := \{S'\} \cup \{X_{q,r} : X \in V, q, r \in Q\}$. Die Idee ist, dass $X_{q,r}$ genau die Wörter erzeugt, die sowohl von X erzeugt werden können, als auch im DFA von Zustand q nach r gehen. Formal soll also $L_{G'}(X_{q,r}) = \{w \in L_G(X) : \hat{\delta}(q, w) = r\}$ gelten. Zusätzlich ist S' ein besonderes Startsymbol.

Konstruieren Sie G'. Geben Sie also insbesondere die Produktionen P' an.

Hinweis: G' muss nicht in CNF sein.

Lösungsskizze. Wir erzeugen folgende Produktionen:

- $S' \to S_{q_0,r}$ für alle $r \in F$,
- $X_{q,r} \to Y_{q,s} Z_{s,r}$ für alle $(X \to YZ) \in P$ und $q, s, r \in Q$, und
- $X_{q,r} \to c$ für alle $(X \to c) \in P$, falls $\delta(q, c) = r$.

Aufgabe H7.3. (*Würze* $\in$ *Kürze*) 3 + 3 Punkte

Die Grammatik G sei über die folgenden Produktionen gegeben:

$$\begin{array}{ll} S \to SS \mid AD \mid DB \mid T & E \to aABb \mid bBAa \mid EabU \\ A \to aT \mid aaD & T \to S \mid ETb \mid aAU \mid \varepsilon \\ B \to Ub \mid BB & U \to WDW \mid aEb \mid aU \\ C \to aV \mid \varepsilon & W \to aB \mid bAUb \mid bWa \\ D \to Sb \mid b & V \to aSb \mid ab \end{array}$$

(a) Eliminieren Sie alle unnützen Symbole aus G mit den aus der Vorlesung bekannten Verfahren. Geben Sie ihren Rechenweg an.

(b) Leider ist G noch nicht klein genug. Geben Sie eine Grammatik G' mit $L(G') = L(G)$ an, die höchstens zwei Produktionen enthält. Beschreiben Sie ihr Vorgehen.

Lösungsskizze. **(a)** Zuerst berechnen wir die Menge der erzeugenden Symbole. Jede Zeile entspricht hierbei einem Schritt der Induktion aus Satz 4.36.

$$\begin{array}{c} \{a, b\} \\ \cup \{C, D, T, V\} \\ \cup \{A, S\} \\ \cup \emptyset \end{array}$$

Hier ist der Fixpunktalgorithmus also abgeschlossen, und wir erhalten folgende Grammatik:

$$\begin{array}{ll} S \to SS \mid AD \mid T & D \to Sb \mid b \\ A \to aT \mid aaD & T \to S \mid \varepsilon \\ C \to aV \mid \varepsilon & V \to aSb \mid ab \end{array}$$

Nun bestimmen wir die Symbole, die erreichbar sind, rekursiv nach Satz 4.39.

$$\begin{array}{c} \{S\} \\ \cup \{A, D, T\} \\ \cup \emptyset \end{array}$$

Schließlich ergibt sich die folgende Grammatik.

$$\begin{array}{ll} S \to SS \mid AD \mid T & D \to Sb \mid b \\ A \to aT \mid aaD & T \to S \mid \varepsilon \end{array}$$

(b) Zuerst eliminieren wir T, da offensichtlich T und S äquivalent sind.

$$\begin{array}{ll} S \to SS \mid AD \mid \varepsilon & D \to Sb \mid b \\ A \to aS \mid aaD \mid a & \end{array}$$

Die Produktionen von D lassen sich einsetzen.

$$\begin{array}{l} S \to SS \mid ASb \mid Ab \mid \varepsilon \\ A \to aS \mid aaSb \mid aab \mid a \end{array}$$

Ebenso die von A.

$$S \to SS \mid aSSb \mid aaSbSb \mid aabSb \mid aSb \mid aaSbb \mid aabb \mid ab \mid \varepsilon$$

Die Produktionen $S \to aSSb \,|\, aaSbSb \,|\, aabSb \,|\, aaSbb \,|\, aabb \,|\, ab$ lassen sich nun entfernen, da man jeweils die rechte Seite auch in folgender Grammatik ableiten kann.

$$S \to SS \mid aSb \mid \varepsilon$$

Diese Grammatik erzeugt genau die balancierten Klammerwörter (mit a als öffnende und b als schließende Klammer), wie aus der Vorlesung (Beispiel 4.10) bekannt. Dafür können wir aber auch eine kleinere Grammatik angeben:

$$S \to aSbS \mid \varepsilon$$