

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2023 – Hausaufgabenblatt 6

Abgabe: 06.06.2023, 23:59

- Bitte beachten Sie, dass in dieser Vorlesung generell Antworten mit Begründung gefordert werden, solange die Aufgabe nicht explizit das Gegenteil sagt.
- Zum Bestehen dieses Blattes müssen Sie 50% der Punkte erreichen.

Aufgabe H6.1. (*Dr. Bankräuber*)

3+2+3+1 Punkte

Der Superschurke Dr. Evilparza hat beschlossen, seinen Lebensstil grundlegend zu überdenken. Das ständige Tüfteln an furchteinflößenden Automaten ist einfach nicht gut für seine Gesundheit. Deswegen wendet er sich nun der Finanzkriminalität zu.

Sei $\Sigma := \{+, -\}$. Wir betrachten ein Bankkonto, dessen Guthaben über eine Transaktion um 1 erhöht oder gesenkt werden kann. Eine Folge von Transaktionen wird dargestellt über ein Wort in Σ^* . Wir wollen nun überprüfen, dass das Konto zu keinem Zeitpunkt überzogen wurde. Wir definieren dazu den Effekt einer Transaktion $w \in \Sigma^*$ als $\Delta(w) := |w|_+ - |w|_-$ und nennen w *überziehend*, wenn es ein i gibt, sodass $\Delta(w_1 \dots w_i) < 0$. Wir definieren L als die Sprache der Wörter, die *nicht* überziehend sind. Es gilt also z.B. $\varepsilon, +++-, +-+- \in L$ und $--, +----+ \notin L$.

Sei $G = (\{S\}, \{+, -\}, P, S)$ die Grammatik mit den Produktionen $S \rightarrow +S-S \mid +S \mid \varepsilon$.

- Zeigen Sie $L(G) \subseteq L$ mit struktureller Induktion.
- Zeigen Sie, dass jedes Wort $w \in L \setminus \{\varepsilon\}$ sich in $w = +u-v$ oder $w = +u$ zerlegen lässt, mit $u, v \in L$.
- Verwenden Sie (b) und beweisen Sie $L(G) \supseteq L$.
- Ist G mehrdeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe H6.2. (*Das Grauen des ∇*)

1 + 3 + 3 Punkte

Sei $\Sigma := \{a, b, \nabla\}$.

- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die folgende Sprache an:

$$L := \{u\nabla v \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u| = |v|, u \neq v^R\}$$

- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die folgende Sprache an:

$$L := \{uv \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u| = |v|, u \neq v\}$$

Tipp: $X^i A X^i X^j B X^j = X^i A X^{i+j} B X^j = X^i A X^j X^i B X^j$

- Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L := \{u\nabla v \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u| = |v|, u \neq v\}$$

nicht kontextfrei ist. Verwenden Sie hierfür das Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen.

Tipp: Verwenden Sie das Wort $z := a^f b^n \nabla a^n b^f$, wobei n die PL-Zahl ist und $f := n + n!$ (sprich “ n plus n Fakultät”).

Aufgabe H6.3. (*Chomsky Strikes Back*)

4 Punkte

Überführen Sie die folgende Grammatik in Chomsky-Normalform. Sie können ihr Ergebnis auch bei Automatatutor überprüfen.

$$S \rightarrow KDT \mid aT \quad (1)$$

$$K \rightarrow c \mid j \mid ET \mid D \quad (2)$$

$$D \rightarrow bDS \mid abb \quad (3)$$

$$T \rightarrow \epsilon \quad (4)$$

$$E \rightarrow a \mid T \quad (5)$$

Aufgabe H6.4. (*Architekt:innen*)

3 + 3 Punkte

Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und $L \subseteq \Sigma^+$ eine kontextfreie Sprache mit gegebener CFG $L(G) = L$ in Chomky-Normalform. Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik G' für die folgenden Sprachen:

(a) L^a

(b) $\{w \in L : |w| \equiv 0 \pmod{9}\}$

Erklären Sie dabei auch die Konstruktionsidee informell. Die Korrektheit der Konstruktion müssen Sie nicht beweisen.