Prof. Javier Esparza
Kevin Kappelmann, Simon Roßkopf, Lukas Stevens

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2023 – Hausaufgabenblatt 6

- Bitte beachten Sie, dass in dieser Vorlesung generell Antworten mit Begründung gefordert werden, solange die Aufgabe nicht explizit das Gegenteil sagt.
- Zum Bestehen diese Blattes müssen Sie 50% der Punkte erreichen.
- Update: Es werden die Aufgaben 4(a–b) korrigiert.

Aufgabe H6.1. (*Dr. Bankräuber*) 3+2+3+1 Punkte

Der Superschurke Dr. Evilsparza hat beschlossen, seinen Lebensstil grundlegend zu überdenken. Das ständige Tüfteln an furchteinflößenden Automaten ist einfach nicht gut für seine Gesundheit. Deswegen wendet er sich nun der Finanzkriminalität zu.

Sei $\Sigma := \{\texttt{+}, \texttt{-}\}$. Wir betrachten ein Bankkonto, dessen Guthaben über eine Transaktion um 1 erhöht oder gesenkt werden kann. Eine Folge von Transaktionen wird dargestellt über ein Wort in Σ^*. Wir wollen nun überprüfen, dass das Konto zu keinem Zeitpunkt überzogen wurde. Wir definieren dazu den Effekt einer Transaktion $w \in \Sigma^*$ als $\Delta(w) := |w|_{\texttt{+}} - |w|_{\texttt{-}}$ und nennen w *überziehend*, wenn es ein i gibt, sodass $\Delta(w_1...w_i) < 0$. Wir definieren L als die Sprache der Wörter, die *nicht* überziehend sind. Es gilt also z.B. $\varepsilon, \texttt{++-+-}, \texttt{+-++-} \in L$ und $\texttt{-+}, \texttt{+-+--++} \notin L$.

Sei $G = (\{S\}, \{\texttt{+}, \texttt{-}\}, P, S)$ die Grammatik mit den Produktionen $S \to \texttt{+}S\texttt{-}S \mid \texttt{+}S \mid \varepsilon$.

(a) Zeigen Sie $L(G) \subseteq L$ mit struktureller Induktion.

(b) Zeigen Sie, dass jedes Wort $w \in L \setminus \{\varepsilon\}$ sich in $w = \texttt{+}u\texttt{-}v$ oder $w = \texttt{+}u$ zerlegen lässt, mit $u, v \in L$.

(c) Verwenden Sie (b) und beweisen Sie $L(G) \supseteq L$.

(d) Ist G mehrdeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsskizze. **(a)** Wir zeigen die Aussage über strukturelle Induktion, für die Basis überprüfen wir also, dass ε nicht überziehend ist und somit $\varepsilon \in L$. Für den Induktionsschritt seien $u, v \in L$. Es gibt nun zwei Fälle.

- $w = \texttt{+}u$: Für beliebiges i gilt $\Delta(w_1...w_i) = 1 + \Delta(u_1...u_{i-1})$. Da u nicht überziehend ist, folgt $\Delta(u_1...u_{i-1}) \geq 0$ und somit $\Delta(w_1...w_i) \geq 1 \geq 0$. Also ist w auch nicht überziehend.
- $w = \texttt{+}u\texttt{-}v$: Für $i \in \{1, ..., |u| + 2\}$ wissen wir bereits $\Delta(w_1...w_i) \geq 0$, analog zum ersten Fall. Für $i > |u| + 2$ gilt nun $\Delta(w_1...w_i) = \Delta(\texttt{+}u\texttt{-}v_1...v_j)$, mit $j := i - |u| - 2$. Es folgt $\Delta(\texttt{+}u\texttt{-}v_1...v_j) = \Delta(u) + \Delta(v_1...v_j) \geq 0$, da sowohl u als auch v nicht überziehend sind.

(b) Es muss $w_1 = \texttt{+}$ gelten (sonst wäre $\Delta(w_1) < 0$ und $w \notin L$). Es gibt also ein x mit $w = \texttt{+}x$. Falls $x \in L$, sind wir bereits fertig. Ansonsten gibt es ein i mit $\Delta(x_1...x_i) < 0$, wir wählen das kleinste solcher i.

Wenn $x_1...x_{i-1}$ überziehend wäre, dann wäre i nicht minimal. Wir erhalten also $x_1...x_{i-1} \in L$. Nun gilt $\Delta(x_1...x_i) = \Delta(x_1...x_{i-1}) + \Delta(x_i)$. Wir wissen, dass $\Delta(x_1...x_i)$ negativ ist (nach Wahl von i), und dass $\Delta(x_1...x_{i-1}) \geq 0$ (da $x_1...x_{i-1}$ nicht überziehend ist). Eine einzelne Transaktion kann den Wert aber nur um $\Delta(x_i) \in \{1, -1\}$ verändern, also folgt $\Delta(x_1...x_{i-1}) = 0$ und $x_i = \texttt{-}$.

Wir wählen unsere Zerlegung also als $u := x_1...x_{i-1}$, $v := x_{i+1}...x_{|w|-1}$. Wir haben bereits festgestellt, dass u nicht überziehend ist, es verbleibt also noch, $v \in L$ zu zeigen.

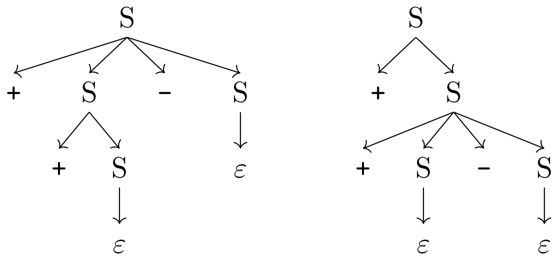
Hierfür können wir $\Delta(u) = 0$ benutzen. Sei j beliebig. Dann gilt $\Delta(v_1...v_j) = \Delta(\texttt{+}u\texttt{-}) + \Delta(v_1...v_j) = \Delta(w_1...w_{|u|+2+j})$. Dies ist nicht negativ, da w nicht überziehend ist.

(c) Wir benutzen Induktion über die Länge der Wortes $w \in L$. Für $|w| = 0$ gilt $w \in L(G)$. Ansonsten verwenden wir die (b) und erhalten eine Zerlegung von w.

Falls $w = \texttt{+}u$ für ein $u \in L$, dann wissen wir nach Induktionsannahme, dass $u \in L(G)$. Daraus folgt $S \to \texttt{+}S \to^* \texttt{+}u = w$, und somit $w \in L(G)$.

Falls $w = \texttt{+}u\texttt{-}v$ für $u, v \in L$, gehen wir ähnlich vor. Nach Induktionsannahme gilt $u, v \in L(G)$, also erhalten wir $S \to \texttt{+}S\texttt{-}S \to^* \texttt{+}u\texttt{-}S \to^* \texttt{+}u\texttt{-}v = w$, und somit $w \in L(G)$.

(d) Die Grammatik ist mehrdeutig, denn das Wort $w = \texttt{++-}$ hat zwei Syntaxbäume.



Aufgabe H6.2. (*Das Grauen des* ∇) 1 + 3 + 3 Punkte

Sei $\Sigma := \{a, b, \nabla\}$.

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die folgende Sprache an:

$$L := \{u\nabla v \mid u, v \in \{a,b\}^*, |u| = |v|, u \neq v^R\}$$

(b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die folgende Sprache an:

$$L := \{uv \mid u, v \in \{a,b\}^*, |u| = |v|, u \neq v\}$$

Tipp: $X^iAX^iX^jBX^j = X^iAX^{i+j}BX^j = X^iAX^jX^iBX^j$

(c) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L := \{u\nabla v \mid u, v \in \{a,b\}^*, |u| = |v|, u \neq v\}$$

nicht kontextfrei ist. Verwenden Sie hierfür das Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen.

Tipp: Verwenden Sie das Wort $z := a^f b^n \nabla a^n b^f$, wobei n die PL-Zahl ist und $f := n + n!$ (sprich "n plus n Fakultät").

Lösungsskizze.

(a)

$$S \to aSa \mid bSb \mid aTb \mid bTa$$
$$T \to aTa \mid aTb \mid bTa \mid bTb \mid \nabla$$

(b)

$$S \to AB \mid BA \qquad A \to XAX \mid a \qquad B \to XBX \mid b \qquad X \to a \mid b$$

Begründung: Satzformen sind von der Form $X^iAX^iX^jBX^j = X^iAX^{i+j}BX^j = X^iAX^jX^iBX^j$ bzw. $X^iBX^iX^jAX^j = \cdots = X^iBX^jX^iAX^j$ mit $i, j \in \mathbb{N}$.

Jedes erzeugte Wort der Länge $2(i+j+1)$ unterscheidet sich damit zumindest in den beiden Zeichen an den Positionen $i+1$ und $(i+j+1)+(i+1)$ (wobei die Positionen ab 1 nummeriert werden).

(c)
- Wir nehmen an, dass L kontextfrei ist und führen diese Annahme zum Widerspruch.
- Sei $n \geq 1$ eine Pumping-Lemma-Zahl für die kontextfreie Sprache L.
- Setze $f := n + n!$ und $z := a^f b^n \nabla a^n b^f$. Wir haben $z \in L$ und $|z| \geq n$.
- Gemäß Pumping-Lemma gibt es dann also eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit Wörtern $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ und den folgenden Eigenschaften:

$$(1)\ vx \neq \epsilon \qquad (2)\ |vwx| \leq n \qquad (3)\ \forall i \in \mathbb{N}.\ uv^iwx^iy \in L$$

- Wir unterscheiden folgende Fälle:
  (1) $|vx|_\nabla \neq 0$: Dann gilt $|uv^0wx^0y|_\nabla = 0$ und somit $uv^0wx^0y \notin L$. Dies ist ein Widerspruch zu (3).
  (2) v, x befinden sich links von ∇: Dann hat aufgrund (1) uv^0wx^0y die Form $w_1\nabla w_2$ mit $|w_1| < |w_2|$ und somit $uv^0wx^0y \notin L$. Dies ist ein Widerspruch zu (3).
  (3) v, x befinden sich rechts von ∇: Analog zu vorherigem.
  (4) v befindet sich links und x rechts von ∇: Wir betrachten drei Fälle:
     i. $|v| < |x|$: Dann hat uv^0wx^0y die Form $w_1\nabla w_2$ mit $|w_1| > |w_2|$ und somit $uv^0wx^0y \notin L$. Dies ist ein Widerspruch zu (3).
     ii. $|v| > |x|$: Analog zu vorherigem.
     iii. $|v| = |x|$: Sei $k := |v|$. Aufgrund von (2) muss $v = b^k$ und $x = a^k$ gelten. Wegen (3) gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$, dass $uv^{i+1}wx^{i+1}y = a^f b^{n+ik}\nabla a^{n+ik} b^f \in L$. Wir wissen $a^f b^f \nabla a^f b^f \notin L$. Um einen Widerspruch abzuleiten, reicht es also $i \in \mathbb{N}$ so zu wählen, dass $n + ik = f = n + n!$ gilt. Wir setzen also $i := n!/k$. Wegen (1) gilt $k > 0$ und wegen (2) gilt $k < n$. Somit ist k ein Teiler von $n!$, d.h. $i \in \mathbb{N}$. Somit folgt auch in diesem Fall ein Widerspruch.
- Da jeder Fall zu einem Widerspruch führt und die obigen Fälle alle möglichen Zerlegungen abdecken, kann die ursprüngliche Annahme nicht gelten. Also ist L nicht kontextfrei.

Aufgabe H6.3. (*Chomsky Strikes Back*) 4 Punkte

Überführen Sie die folgende Grammatik in Chomsky-Normalform. Sie können ihr Ergebnis auch bei Automatatutor überprüfen.

$$S \to KDT \mid aT \tag{1}$$
$$K \to c \mid j \mid ET \mid D \tag{2}$$
$$D \to bDS \mid abb \tag{3}$$
$$T \to \epsilon \tag{4}$$
$$E \to a \mid T \tag{5}$$

Lösungsskizze. Zwischenschritte:

$$\begin{aligned}S &\to KDT \mid aT\\ K &\to c \mid j \mid ET \mid D\\ D &\to bDS \mid abb\\ T &\to \epsilon\\ E &\to a \mid T\end{aligned} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{aligned}S &\to KDT \mid AT\\ K &\to c \mid j \mid ET \mid D\\ D &\to BDS \mid ABB\\ T &\to \epsilon\\ E &\to a \mid T\\ A &\to a\\ B &\to b\end{aligned} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{aligned}S &\to KX \mid AT\\ X &\to DT\\ K &\to c \mid j \mid ET \mid D\\ D &\to BY \mid AZ\\ Y &\to DS\\ Z &\to BB\\ T &\to \epsilon\\ E &\to a \mid T\\ A &\to a\\ B &\to b\end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow\quad \begin{aligned}S &\to KX \mid X \mid AT \mid A\\ X &\to DT \mid D\\ K &\to c \mid j \mid ET \mid D \mid E \mid T \mid \epsilon\\ D &\to BY \mid AZ\\ Y &\to DS\\ Z &\to BB\\ T &\to \epsilon\\ E &\to a \mid T \mid \epsilon\\ A &\to a\\ B &\to b\end{aligned} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{aligned}S &\to KX \mid X \mid A \mid A\\ X &\to D \mid D\\ K &\to c \mid j \mid E \mid D \mid E\\ D &\to BY \mid AZ\\ Y &\to DS\\ Z &\to BB\\ E &\to a\\ A &\to a\\ B &\to b\end{aligned}$$

Lösung:
$$\begin{aligned}S &\to KX \mid BY \mid AZ \mid a\\ X &\to BY \mid AZ\\ K &\to c \mid j \mid a \mid BY \mid AZ\\ D &\to BY \mid AZ\\ Y &\to DS\\ Z &\to BB\\ E &\to a\\ A &\to a\\ B &\to b\end{aligned}$$

Aufgabe H6.4. (*Architekt:innen*) 3 + 3 Punkte

Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und $L \subseteq \Sigma^+$ eine kontextfreie Sprache mit gegebener CFG $L(G) = L$ in Chomky-Normalform. Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik G' für die folgenden Sprachen:

(a) L^a

(b) $\{w \in L : |w| \equiv 0 \pmod 9\}$

Erklären Sie dabei auch die Konstrukionsidee informell. Die Korrektheit der Konstruktion müssen Sie nicht beweisen.

Lösungsskizze. Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ in CNF mit $L(G) = L$. Wir konstruieren jeweils eine Grammatik $G' = (V', \Sigma, P', S')$.

(a) Als Variablen verwenden wir $V' := V \uplus \{X_a \mid X \in V\}$, und das Startsymbol ist nun $S' := S_a$. Die Idee ist, dass $L_{G'}(X_a) = L_G(X)^a$ für jedes $X \in V$ gilt, dass also X_a genau die Wörter erzeugt, die der Residualsprache der von X erzeugten Wörter entsprechen.

Die Produktionen P' konstruieren wir folgendermaßen:

- Alle Produktionen aus P sind in P' enthalten.
- Für $(X \to a) \in P$ fügen wir $X_a \to \varepsilon$ zu P' hinzu.
- Für $(X \to YZ) \in P$ fügen wir $X_a \to Y_a Z$ zu P' hinzu.

(b) Hier benutzen wir $V' := \{X_i \mid X \in V, i \in \{0, \dots, 8\}\}$ und $S' := S_0$. Die Idee ist, dass $L_{G'}(X_i) = \{w \in L_G(X) \mid |w| \equiv i \pmod 9\}$ gilt, dass also X_i genau die Wörter erzeugt, die X erzeugt und deren Länge geteilt durch 9 Rest i hat. Dazu verwenden wir folgende Produktionen.

- Für $(X \to a) \in P$ fügen wir $X_1 \to a$ zu P' hinzu.
- Für $(X \to YZ) \in P$ fügen wir $X_i \to Y_j Z_k$ zu P' hinzu, für alle $i, j, k \in \{0, ..., 8\}$ mit $i \equiv j + k \pmod 9$.