Prof. Javier Esparza
Kevin Kappelmann, Simon Roßkopf, Lukas Stevens

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2023 – Hausaufgabenblatt 4

- Bitte beachten Sie, dass in dieser Vorlesung generell Antworten mit Begründung gefordert werden, solange die Aufgabe nicht explizit das Gegenteil sagt.
- Zum Bestehen diese Blattes müssen Sie ~~50~~ 37,5% der Punkte erreichen.
- Es werden die Aufgaben 1 (a) und 4 (d) korrigiert.

Aufgabe H4.1. (*Pump für den Schurken*) 3 + 1 + 4 Punkte

Es ist nicht zu glauben – Dr. Evilsparza wurde erneut von euch besiegt! Damit das Ganze nicht zu langweilig wird, nehmt ihr in diesem Blatt die Rolle des trickreichen Superschurken ein. Seid bereit, möglichst großes Unheil anzurichten.

Mit eurem Kristallomaten beobachtet ihr – Dr. Evilsparzas – wie die tapferen Theo-Studierenden in Ü4.3. die nicht-regularität verschiedenster Sprachen mit Hilfe des Pumping Lemmas bewiesen haben. Den vielen Erfolgen möchtet ihr natürlich schnell ein Ende bereiten, weswegen ihr euch in eure Werkstube begebt, um an trickreichen Sprachen zu tüfteln. Und nach kurzer Zeit ist es euch dann auch gelungen: eine teuflische Sprache, um die Studierenden in die Irre zu führen!

Um die Studierenden zu überlisten, fixiert ihr das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ und die folgenden Sprachen:

$$L_1 \coloneqq \{ab^nc^n \mid n \in \mathbb{N}_+\}, \qquad L_2 \coloneqq \{a^lb^mc^n \mid l \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \wedge m, n \in \mathbb{N}\}, \qquad L_3 \coloneqq L_1 \cup L_2.$$

Mit der Sprache L_3, so eure Vermutung, werdet ihr die Studierenden so richtig übers Ohr hauen. Denn es ist eine nicht-reguläre Sprache, die dennoch die Bedingungen des Pumping Lemmas erfüllt! Ihr freut euch schon darauf, wie die Studierenden aussichtslos und tagelang dennoch versuchen, nicht-regularität der Sprache mit dem Pumping Lemmas zu beweisen.

Bevor ihr nun aber die Falle einsetzt und euch an den Misserfolgen ergötzt, möchtet ihr natürlich sicher stellen, dass sie auch wirklich funktioniert...

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass L_1 nicht regulär ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus (a) und der Abschlusseigenschaft von regulären Sprachen unter Schnitt ($\cap$), dass L_3 nicht regulär ist.

Hinweis: Nehmen Sie hierfür an, dass L_3 regulär ist und führen sie dies mit Hilfe der genannten Abschlusseigenschaft zu einem Widerspruch.

(c) Zeigen Sie, dass L_3 die Bedingungen des Pumping Lemmas erfüllt.

Tipp: Machen Sie eine Fallunterscheidung, ob das zu zerlegende Wort in L_1 oder L_2 ist.

Lösungsskizze.

(a) Angenommen, L_1 wäre regulär.

Dann können wir das Pumping-Lemma anwenden.

Sei $n \in \mathbb{N}_+$ eine Pumping-Lemma-Zahl.

Dann gilt $z = ab^nc^n \in L_1$ und $|z| \geq n$.

Es gibt also für z eine Zerlegung $z = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$, sodass $uv^iw \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ $(*)$.

Wir betrachten zwei Fälle:

- **Fall $|v|_a = 1$:** Dann folgt $|uv^0w|_a = 0$ und daher $uv^0w \notin L_1$. Widerspruch zu $(*)$.
- **Fall $|v|_a = 0$:** Da $|uv| \leq n$ und $v \neq \epsilon$, folgt aufgrund der Wahl von z dass $|v|_b > 0$ und $|uv|_c = 0$. Dann folgt $|uv^0w|_b < |uvw|_b = |uvw|_c = |uv^0w|_c$. Somit $uv^0w \notin L_1$. Widerspruch zu $(*)$.

Das heißt unsere ursprüngliche Annahme ist falsch und L_1 nicht regulär.

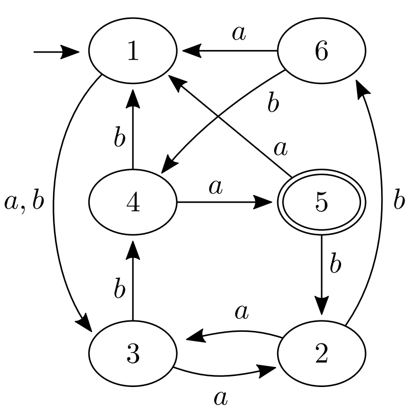
(b) Wenn L_3 regulär wäre, dann wäre auch $L_3 \cap L(ab^*c^*) = L_1$ regulär (reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Durchschnitt). Widerspruch zu (a).

(c) Wir setzen $n \coloneqq 3$. Sei nun $z \in L_3$ mit $|z| \geq n$. Wir müssen z geeignet zerlegen, sodass die Bedingungen des Pumping Lemmas erfüllt sind.

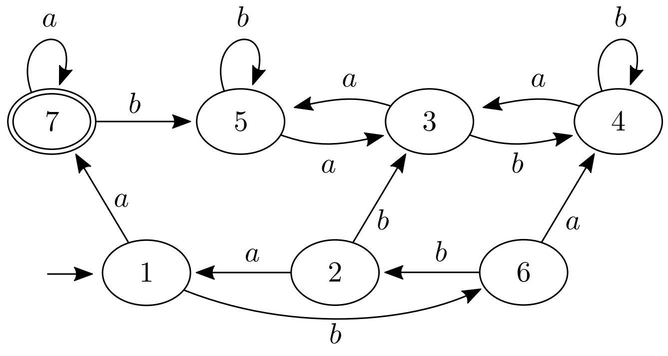
- **Fall $z \in L_1$:** Dann gilt $z = ab^mc^m$ mit $m \in \mathbb{N}_+$. Wir setzen $u \coloneqq \epsilon$, $v \coloneqq a$, $w \coloneqq b^mc^m$. Dann gillt $v = a \neq \epsilon$, $|uv| = 1 \leq 3 = n$ und $uv^iw = a^ib^mc^m$. Für $i = 1$ gilt dann $a^ib^mc^m \in L_1 \subseteq L_3$ und für $i \neq 1$ gilt $a^ib^mc^m \in L_2 \subseteq L_3$.
- **Fall $z \in L_2$:** Dann gilt $z = a^lb^mc^k$ mit $l \in (\mathbb{N} \setminus \{1\})$ und $m, k \in \mathbb{N}$.
  - **Fall $l > 2$:** Wir setzen $u \coloneqq \epsilon$, $v \coloneqq a$, $w \coloneqq a^{l-1}b^mc^k$. Dann gillt $v = a \neq \epsilon$, $|uv| = 1 \leq 3 = n$ und $uv^iw = a^{i+l-1}b^mc^k$. Da $l > 2$, folgt $i + l - 1 \geq 2$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Somit $a^{i+l-1}b^mc^k \in L_2 \subseteq L_3$.
  - **Fall $l \leq 2$ und $m > 0$:** Wir setzen $u \coloneqq a^l$, $v \coloneqq b$, $w \coloneqq b^{m-1}c^k$. Dann gillt $v = b \neq \epsilon$, $|uv| = l + 1 \leq 2 + 1 = 3 = n$ und $uv^iw = a^lb^{i+m-1}c^k$. Da $m > 0$, folgt $i + m - 1 \in \mathbb{N}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und somit $a^lb^{i+m-1}c^k \in L_2 \subseteq L_3$ (bemerke: $l \in \{0, 2\}$).
  - **Fall $l \leq 2$ und $m = 0$:** Dann folgt $z = a^lc^k$ und da $l \leq 2$ und $|z| \geq n = 3$ folgt $k > 0$. Wir setzen $u \coloneqq a^l$, $v \coloneqq c$, $w \coloneqq c^{k-1}$. Dann gillt $v = c \neq \epsilon$, $|uv| = l + 1 \leq 2 + 1 = 3 = n$ und $uv^iw = a^lc^{i+k-1}$. Da $k > 0$, folgt $i + k - 1 \in \mathbb{N}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und somit $a^lc^{i+k-1} \in L_2 \subseteq L_3$ (bemerke: $l \in \{0, 2\}$).

Aufgabe H4.2. (*Mimimiminimierung*) 2+2 Punkte

Minimieren Sie folgende DFAs mit Hilfe des erweiterten Minimierungsalgorithmus aus Ü4.4(b). Geben Sie sowohl die Tabelle als auch den resultierenden Automaten explizit an.



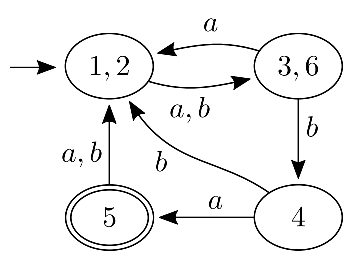
(a)



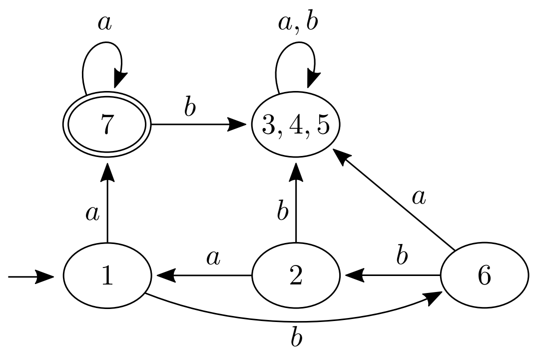
(b)

Sie können die Korrektheit ihres Automaten in Automatatutor überprüfen.

Lösungsskizze.



(a)



(b)

Aufgabe H4.3. (*Residualsprachen*) 1+1+1+1 Punkte

Bestimmen Sie einen regulären Ausdruck für die Residualsprache $L(r)^a$, für jeden der folgenden Regulären Ausdrücke:

(a) $ab(aa \mid bb)^* \mid ba$ (b) $(abb \mid baa)^*$ (c) $(ab \mid a)^* ab$

Sie können die Korrektheit ihrer Ausdrücke in Automatatutor überprüfen.

(d) Entscheiden Sie für jeden der drei gegebenen regulären Ausdrücke, ob ein Wort $w \neq a$ existiert, sodass $L(r)^a = L(r)^w$. Geben Sie das Wort w an, falls es existiert.

Lösungsskizze.

(a) $b(aa \mid bb)^*$

(b) $bb(abb \mid baa)^*$

(c) $(b \mid \epsilon)(ab \mid a)^* ab \mid b$

(d) Für den ersten Ausruck kann man das Wort *abb* verwenden. Für den zweiten kann man das Wort *abba* verwenden und für den dritten *aa*.

Aufgabe H4.4. (*Ich nehm den 50:50 Joker*) 4 Punkte

Bestimmen Sie für folgende Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind. Geben sie eine kurze Begründung für wahre Aussagen an und ein Gegenbeispiel mit Begründung für falsche.

Sei $\Sigma \neq \emptyset$ ein Alphabet. Für alle reguläre Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, und nicht-reguläre Sprachen $L_3, L_4 \subseteq \Sigma^*$ gilt:

(a) $(L_1 \cap L_2)^2$ ist regulär.

(b) $L_3 \cup L_4$ ist nicht regulär.

(c) Jede Teilmenge $L \subseteq L_1$ ist regulär.

(d) Seien L_5, L_6 beliebige Sprachen. Wenn $L_5 L_6$ regulär ist, dann ist L_5 und L_6 regulär.

Lösungsskizze.

(a) Wahr. Da L_1 und L_2 regulär sind, gibt es DFAs N_1 und N_2 mit $L(N_1) = L_1$ und $L(N_2) = L_2$. Die Produktkonstruktion liefert einen Automaten $N_1 \times N_2$ für $L_1 \cap L_2$, somit ist $L_1 \cap L_2$ regulär. Damit gibt es einen regulären Ausdruck r mit $L(r) = L_1 \cap L_2$. Dann gilt $L(rr) = (L_1 \cap L_2)^2$, somit ist die geforderte Sprache regulär.

(b) Falsch. Sei L_3 eine beliebige nicht-reguläre Sprache. Wähle $L_4 = \bar{L}_3$. Wir behaupten L_4 ist nicht-regulär. Angenommen L_4 wäre regulär. Dann gibt es einen DFA für L_4 und das Komplement dieses DFAs berechnet daher die Sprache L_3, die nicht-regulär ist, Widerspruch. Also ist L_4 nicht-regulär. Aber $L_3 \cup L_4 = \Sigma^*$ ist regulär.

(c) Falsch. Gegenbeispiel: Wähle $\Sigma = \{a, b\}$, $L_1 := \Sigma^*$ und wähle für L eine beliebige nicht-reguläre Sprache, zum Beispiel $\{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist L_1 regulär und $L \subseteq L_1$, aber L ist nicht-regulär.

(d) Falsch. Sei L_5 eine beliebige nicht-reguläre Sprache und $L_6 := \emptyset$. Dann ist $L_5 L_6 = \emptyset$ regulär.