

## Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2023 – Hausaufgabenblatt 1

**Abgabe: 02.05.2023, 23:59 CEST**

- Beachten Sie die Abgaberichtlinien für die Hausaufgaben auf der [Vorlesungswebsite!](#)
- Bitte beachten Sie, dass in dieser Vorlesung generell Antworten mit Begründung gefordert werden, solange die Aufgabe nicht explizit das Gegenteil sagt.
- Zum Bestehen dieses Blattes müssen Sie 50% der Punkte erreichen.

### AT-Aufgabe H1.1. (*Mein Lieblingstutor*)

0 Punkte

Diese Hausaufgabe wird mit [Automata Tutor](#) bearbeitet. Falls Sie es noch nicht bereits gemacht haben, folgen Sie den Schritten in Ü1.2, um ein Konto zu erstellen. Achten Sie darauf, dass Sie sich, wie dort beschrieben, mit Ihrer TUM-Kennung anmelden.

Bearbeiten Sie die Hausaufgaben H1.1 (a–c).

### Aufgabe H1.2. (*Verstehen Sie Sprachen?*)

3 Punkte

Sei  $\Sigma := \{a, b\}$ ,  $A := \{\varepsilon, a, ab\}$ ,  $B := \{b, ba\}$ . Bestimmen Sie folgende Mengen:

- (a)  $AB \setminus (A \cup B)$       (b)  $A^3\emptyset$       (c)  $\emptyset^*A^0$       (d)  $(A \times \emptyset)^* \times B$

### Aufgabe H1.3. (*Fragwürdige Wahrheiten*)

4 Punkte

Beim Chat mit einem textbasierten Onlinedialogsystem<sup>TM</sup> erhält Dora die folgenden, angeblich gültigen, Aussagen. Sie ist sich jedoch nicht sicher, ob Sie dem System vertrauen kann...Sie bittet euch daher um Hilfe, die Behauptungen zu überprüfen.

Sei  $\Sigma \neq \emptyset$  ein Alphabet, und  $A, B, C \subseteq \Sigma^*$  Sprachen über  $\Sigma$ . Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

- (a)  $AA^* = A^* \implies \varepsilon \in A$       (d)  $A(BC) = (AB)C$   
(b)  $A \subseteq B \Leftrightarrow A^+ \subseteq B^+$       (e)  $AB \setminus AC = A(B \setminus C)$   
(c)  $|A \times A| = |AA|$       (f)  $|AB| \geq |A|$

**Hinweis:** Für alle ungültigen Aussagen gibt es ein Gegenbeispiel, in dem jede Sprache höchstens zwei Wörter mit höchstens zwei Buchstaben hat.

### Aufgabe H1.4. (*Obacht! Ein $n$ -DFA!*)

2 + 2 + 3 Punkte

Der Superschurke [Dr. Evilparza](#) ist zurück! Seine lange Winterpause hat er sinnvoll genutzt, um an neuen Automaten in seiner Werkstube zu schrauben. Seine erste Erfindung: der  $n$ -DFA. Teuflisch lässt er die theoretische Konstruktion auf die arme Studierendenschaft los. Gelingt es euch, Dr. Evilparzas Erfindung durch die Kraft des Beweises zu zähmen?

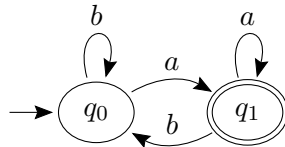
Sei  $n \in \mathbb{N}_+$ . Ein  $n$ -DFA  $M$  ist ähnlich zu einem DFA und wird beschrieben durch ein Tupel  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ . Allerdings akzeptiert ein  $n$ -DFA ein Wort nicht, indem er beim Lesen des Wortes in einem Zustand in  $F$  endet, sondern indem er während des Lesens des Wortes *mindestens*  $n$ -mal Zustände in  $F$  besucht. Insbesondere kann ein  $n$ -DFA sich am Ende eines akzeptierten Laufes also auch in einem Zustand in  $Q \setminus F$  befinden.

Genauer definieren wir die *Multimenge*<sup>1</sup> der von  $M$  besuchten Endzuständen bei Eingabe  $w$  aus Zustand  $q$  rekursiv durch

$$V(\epsilon, q) := \begin{cases} \{q\}_m, & \text{falls } q \in F \\ \emptyset_m, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad V(aw, q) := \begin{cases} \{q\}_m \cup_m V(w, \delta(q, a)), & \text{falls } q \in F \\ V(w, \delta(q, a)), & \text{sonst} \end{cases}$$

und die von  $M$  akzeptierte Sprache als  $L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid |V(w, q_0)|_m \geq n\}$ .

Beispiel: der folgende  $n$ -DFA akzeptiert die Sprache  $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq n\}$ .



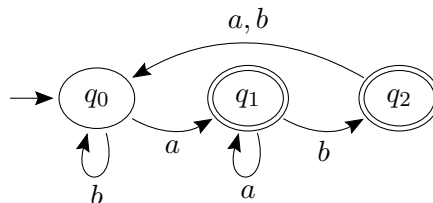
Es gilt beispielsweise

$$\begin{aligned} V(aba, q_0) &= V(ba, q_1) = \{q_1\}_m \cup_m V(a, q_0) \\ &= \{q_1\}_m \cup_m V(\epsilon, q_1) = \{q_1\}_m \cup_m \{q_1\}_m = \{q_1, q_1\}_m. \end{aligned}$$

- Zeigen Sie: Es gibt einen DFA dessen Sprache von keinem 1-DFA erkannt werden kann.
- Zeigen oder widerlegen Sie: für jeden DFA  $M$  existiert ein  $n$ , sodass es einen  $n$ -DFA gibt, der dieselbe Sprache wie  $M$  akzeptiert.

Falls Sie die Aussage widerlegen möchten, geben Sie ein passendes Gegenbeispiel an und zeigen Sie die Korrektheit ihres Gegenbeispiels. Falls Sie die Aussage zeigen möchten, geben Sie eine formale Übersetzung von DFAs zu  $n$ -DFAs an. Die Korrektheit der Übersetzung müssen Sie dabei nicht beweisen, allerdings informell erläutern.

- Zeichnen Sie einen DFA, der dieselbe Sprache wie der folgende 3-DFA erkennt:



### Aufgabe H1.5. (Buchstabenfehler)

2 + 2 Punkte

Nicht nur in seiner Werkstube war Dr. Evilspärza aktiv. Er hat sich auch noch ins Campusnetzwerk gehackt und dabei ist es ihm gelungen, wichtige Daten zu löschen! Sie sind Teil des Cybersecurityteams, das versucht das Ausmaß des Schadens zu bestimmen.

Sei  $\Sigma := \{a, b\}$  ein Alphabet.

- Sei  $G$  eine beliebige Grammatik, und  $G'$  eine Grammatik, die durch das Entfernen von einer beliebigen Produktion aus  $G$  entsteht. Beweisen oder widerlegen Sie  $L(G') \subseteq L(G)$ .
- Sei  $G$  wieder eine beliebige Grammatik, und  $G'$  eine Grammatik, die man erhält, wenn man von  $G$  ein beliebiges Nichtterminalzeichen aus der rechten Seite einer beliebigen Produktion löscht. Beweisen oder widerlegen Sie:  $L(G') \subseteq L(G)$

<sup>1</sup>d.h. Mengen, die möglicherweise Duplikate enthalten; zur Klarstellung indizieren wir Operationen auf Multimengen mit einem  $m$ , z.B.  $\emptyset_m, \cup_m, \{\cdot\}_m, |\cdot|_m$